Nekomutativni prostori u fizici

Fran Globlek
Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu
(Datum 18. siječnja 2018.)

Nekomutativni prostori obećavajući su kandidati za opis fizike na Planckovoj skali, gdje se iz generalnih fizikalnih razloga očekuje značajna modifikacija prostorvremena. Oni imaju čvrsto matematičko uporište te predstavljaju veoma novo i živo područje istraživanja. Fokusirajući se na Moyalov i κ-Minkowski prostor, najjednostavnije primjere nekomutativnih prostora, pokazujemo osnove algebarskog pristupa fizici na njima.

SADRŽAJ

I. UVOD

A. Motivacija i povijesni pregled

Interes za nekomutativne prostore u fizici prvi put se javio kao rješenje problema divergencija u kvantnoj teoriji polja. Ideja nekomutativnosti kao realizacije određene granularnosti prostora koja istodobno ne narušava Lorentz invarijantnost vjerojatno potječe od Heisenberga, a prvi je rad na tu temu objavio Snyder 1947. [1]. Budući da su uzroci divergencija interakcije koje predstavljamo množenjem operatora u nekoj točki, Snyder je izlaz ponudio kao razmazivanje te točke na analogan način kao što to nekomutativnost koordinata i momenata čini točkama u kvantnom faznom prostoru. Ipak, simultani razvoj veoma uspješne metode renormalizacije bacio je ovakve ideje u zaborav na malo manje od pola stoljeća, kada je nekomutativnost otkrivena kao određen limes u teoriji struna. Seiberg i Witten 1999. objavljuju veoma detaljnu i utjecajnu analizu [4] gdje koordinate krajeva otvorenih struna u prisutstvu konstantnog Kolb-Ramondovog polja spojenih na D-brane postaju nekomutativne u limesu efektivne teorije polja, što nekomutativne prostore vraća u fokus istraživanja gdje ostaju do danas.

Osim eksplicitnog predviđanja teorije struna, postoji i generalni, poluklasični argument za nužnost modifikacije strukture prostora na kvantnogravitacijskim skalama koje odgovaraju Planckovoj duljini, $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-33}$ cm. Ukratko, energija potrebna za istraživanje prostora na tim skalama nužno bi stvorila mikroskopsku crnu rupu, što bi značilo da je mjerenje postalo nemoguće [2, 3, 5]. Doplicher, Fredenhagen i Roberts su 1995. pokazali [6] da je nekomutativnost konzistentno rješenje ovog problema, s nesigurnostima oblika

$$\Delta\hat{x}^\mu \Delta\hat{x}^\nu \geq l_p^2 \tag{1}$$

koje možemo realizirati nekomutativnom algebrom općenitog oblika

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = l_p^2 \theta^{\mu\nu}\left(\frac{\hat{x}}{l_p}\right) \tag{2}$$

Treba napomenuti da se ova nekomutativnost nije još uspijela povezati s gravitacijom u smislu da je određena njome na nekakav dinamički način. Istraživanje se zasad fokusira na konstrukcijama teorija polja na ovakvim prostorima, s nekomutativnosti kao kvantnogravitacijskim efektom ili pozadinom.

Osim fizike, nekomutativni prostori prirodno zaokupiraju interes matematičke zajednice još od osamdesetih i rada Alaina Connesa koji se nastavio do danas. Elaborirat ćemo neke od matematičkih motivacija kad uvedemo nekoliko potrebnih pojmova. Spomenimo još i da je nekomutativnost povezana i s tzv. *dvostruko-specijalnom relativnosti*, gdje osim maksimalne brzine postoji i minimalna udaljenost.

B. Struktura rada

Rad je strukturiran na idući način. U prvoj sekciji uvodimo pojmove algebre, koalgebre i modula, potrebnih

za definiciju glavnog alata kojeg koriste stručnjaci u ovom području, *Hopfovih algebri*. Budući da smo ovime do na neke tehnikalije uveli dovoljno pojmova, prokomentirat ćemo određene teoreme koji nam opravdavaju da pričamo o nekomutativnom *prostoru*, iako u ovom prostoru zapravo ne postoje točke. Zatim ćemo u drugoj sekciji detaljno proučiti svojstva najjednostavnijeg primjera, Moyalovog prostora, na kojem ćemo pokazati kako uvesti $\star$-produkt, zakretanje i kako naći deformaciju Poincaréove algebre koja će na taj prostor djelovati. U trećem poglavlju uvodimo drugi tip deformacije, κ-Minkowski, u kojem se susrećemo s problemima pri definiciji teorije polja. U zadnjem poglavlju komentiramo kako postupati s općenitijim deformacijama, susrećemo jednu posljedicu invarijantnosti na deformirane Lorentzove transformacije te komentiramo kako uvesti i još općenitije deformacije poput neasocijativnih "prostora".

II. ALGEBRA I GEOMETRIJA

U ovom dijelu izlažemo osnovne definicije potrebne za uvođenje *Hopfovih algebri*, moćnog i već standardnog matematičkog alata ovog područja koji je u stanju opisati i teorije grupa i Liejevih algebri kao specijalne slučajeve. Čitatelja upućujemo i na standardnu referencu [9]. Također ćemo prokomentirati skicu dualnosti geometrije i algebre. Ova dualnost opravdava algebarski pristup kakvim prilazimo nekomutativnoj geometriji.

A. (Ko)algebre

Krećemo definicijom algebre i koalgebre te njihovih djelovanja na druge (ko)algebre. U idućem, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ su vektorski prostori nad poljem k karakteristike nula.

Definicija 1. ***Algebra*** *je trojka* $(\mathcal{A}, m, \eta)$ *gdje su* $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *i* $\eta : k \to \mathcal{A}$ *linearne mape koje zovemo multiplikacijom (ili produktom) odnosno jedinicom. One zadovoljavaju relacije*

$$m \circ (m \otimes id) = m \circ (id \otimes m) \quad \text{(asocijativnost)}$$
$$m \circ (\eta \otimes id) = m \circ (id \otimes \eta) = id \quad \text{(jedinica)}$$

Primjetimo da smo zapravo definirali asocijativnu unitalnu algebru jer ćemo se samo takvima baviti. Često multiplikaciju označavamo simbolom između dvaju objekata algebre ili nikako. Definicija koalgebre je *dualna* definiciji algebre, u smislu da se sve strelice obrnu i dodaju prefiksi *ko-*.

Definicija 2. ***Koalgebra*** *je trojka* $(\mathcal{K}, \Delta, \epsilon)$ *gdje su* $\Delta : \mathcal{K} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$ *i* $\epsilon : \mathcal{K} \to k$ *linearne mape koje zovemo komultiplikacijom (ili koproduktom) odnosno kojedinicom. One zadovoljavaju relacije*

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{(koasocijativnost)}$$
$$(\epsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \epsilon) \circ \Delta = id \quad \text{(kojedinica)}$$

Tekst definicije je isti do na prethodnu opasku. Pojam algebre je otprije poznat stoga pogledajmo jedan primjer koalgebre.

Primjer II.1. *Prostor* k^G *funkcija nad grupom* G *je koalgebra uz komultiplikaciju* $\Delta(f)(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$ *i kojedinicu* $\epsilon(f) = f(1_G)$*, gdje je* $f \in k^G$*,* $g_1, g_2, 1_G \in G$ *i* 1_G *jedinica grupe.*

Primjetimo da je ovaj primjer zapravo *dualno uparivanje* koalgebre funkcija i algebre grupe. Dualno uparivanje je mapa $\langle \_, \_ \rangle : G^* \times G \to k$ tako da imamo $\langle \Delta(f), g_1 \otimes g_2 \rangle = \langle f, g_1 g_2 \rangle$ i $\epsilon(f) = \langle f, 1_G \rangle$. Sličan primjer je i uparivanje bra i ket-a međutim ovdje treba ima dodatnih pravila jer treba poštivati i danu (ko)algebarsku strukturu.

Prije prelaska na Hopfove algebre, definirat ćemo i djelovanje algebre

Definicija 3. *Lijevo* ***djelovanje*** *(ili* ***reprezentacija****) algebre* $\mathcal{A}$ *na vektorski prostor* V *je linearna mapa* $\_ \triangleright \_ : \mathcal{A} \otimes V \to V$ *takva da*

$$(a_1 a_2) \triangleright v = a_1 \triangleright (a_2 \triangleright v), \quad 1 \triangleright v = v$$

za $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ *i* $v \in V$*. Tada* V *nazivamo lijevim* $\mathcal{A}$*-modulom, a* $\mathcal{A}$ *lijevim modulom nad* V*.*

Jedan od najjednostavnijih primjera je adjungirano djelovanje grupe, $h \triangleright g \equiv Ad_h g = hgh^{-1}$ za neki g iz grupe i h iz recimo neke podgrupe.

B. Dualnost geometrije i algebre

Sad kad smo se prisjetili što su to algebre i moduli, dat ćemo što šturije moguće iskaz dvaju teorema koji pokazuju određenu ekvivalenciju algebre s geometrijom. Postoje i elementarni primjeri: skup polinoma određuje zajednički skup nultočaka, a ima algebarsku strukturu. S druge strane, geometrija odnosno neki skup točaka određuje skup polinoma kojima su to nultočke.

Prvo dualnost samog prostora s algebrom. Svaki Hausdorffov topološki prostor ima jednu bogomdanu pridruženu komutativnu algebru, algebru neprekidnih kompleksnih funkcija nad njim. Takve algebre možemo gledati kao komutativni slučaj C^*-algebre, koja je također kompleksna algebra, no ujedno i Banachov prostor (normiran i potpun) s involucijom "$*$" koja je antihomomorfizam, odnosno $(xy)^* = y^* x^*$ za x, y iz algebre. Ova "kompleksna konjugacija" treba biti kompatibilna s normom, $\|x^* x\| = \|x\|^2$. Međutim, postoji i obrat, koji kaže da svaka komutativna algebra određuje topološki prostor, kojemu je ona opet algebra kompleksnih funkcija. Točnije:

Teorem II.1 (Gelfand-Naimark)**.** *Neka je* $\mathcal{A}$ *komutativna* C^**-algebra. Tada je* $\gamma : \mathcal{A} \to C^0(X(\mathcal{A}))$ *izometrični* $*$*-izomorfizam.* $X(\mathcal{A})$ *je lokalno kompaktni Hausdorffov topološki prostor neiščezavajućih kompleksnih homomorfizama* $\chi : A \to \mathbb{C}$*.*

Sam Gelfandov homomorfizam dan je s $\gamma(a)(\chi) = \chi(a)$, za $a \in \mathcal{A}$ i $\chi \in X(\mathcal{A})$. Detalji dokaza su u [8] i [7]. Dakle, svaka takva algebra određuje prostor kojemu je ona do na izomorfizam algebra kompleksnih funkcija.

Osim ovog treba spomenuti i sličnu dualnost struktura nad mnogostrukostima, jer one opisuju fiziku. Ako gledamo $E \to X$ vektorski svežanj nad glatkom mnogostrukosti X, tada vrijedi

Teorem II.2 (Serre-Swan)**.** *Vektorski svežnjevi nad X su u bijekciji s konačno generiranim projektivnim modulima nad $C^\infty(X)$ do na klase izomorfizama.*

Dokaz, tehnički detalji i još mnogo ovakvih rezultata nalazi se u [10]. Naravno, pitanje je što se događa kad radimo s *nekomutativnim* algebrama? Tada nemamo više jasnu geometrijsku sliku jer nemamo pojam točke, ona algebarska međutim ostaje. Zato ipak govorimo o nekomutativnim *prostorima*. Pogotovo jer većinu smatramo deformacijom običnih prostora.

C. Hopfove algebre

Nastavljamo s najbitnijom matematikom, definicijom bialgebre i Hopfove algebre:

Definicija 4. ***Bialgebra*** *$\mathcal{B}$ je istodobno algebra i koalgebra. Kompatibilnost traži*

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b),\ \Delta(1) = 1 \otimes 1$$
$$\epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b),\ \epsilon(1) = 1$$

za svaki $a, b \in \mathcal{B}$. ***Hopfova algebra*** *$\mathcal{H}$ je bialgebra s antipodom, linearnom mapom $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ koja zadovoljava*

$$m \circ (S \otimes id) \otimes \Delta = m \circ (id \otimes S) \otimes \Delta = \eta \circ \epsilon.$$

Upravo se struktura Hopfovih algebri javlja u radu s nekomutativnim prostorima pri promatranju simetrija, na primjer deformacija Poincaréove algebre. Algebarski aspekt je jasan od prije, dok koalgebarski dio zapravo određuje deformaciju Leibnitzovog pravila. Naime, ako želimo raditi s nekom algebrom $\mathcal{A}$ koja je lijevi $\mathcal{H}$-modul, moramo dodati kompatibilnost s koalgebarskom strukturom:

$$h \triangleright (ab) = m \circ (\Delta(h)\,(\triangleright \otimes \triangleright)\,(a \otimes b)) \tag{3}$$

U ovakvoj notaciji je teže vidjeti što se traži, pa uvodimo Sweedlerovu notaciju, gdje je

$$\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)} \tag{4}$$

U znaku sumacije se radi jednostavnosti izbjegavaju indeksi. Sad prethodni izraz glasi:

$$h \triangleright (ab) = \sum \left(h_{(1)} \triangleright a\right)\left(h_{(2)} \triangleright b\right) \tag{5}$$

Osim njega tražimo i $h \triangleright 1 = \epsilon(h)1$. Uzmimo na primjer nedeformirane generatore translacija P^μ Poincaréove grupe $\mathcal{P}$. Njihov koalgebarski sektor dan je s

$$\Delta(P^\mu) = P^\mu \otimes 1 + 1 \otimes P^\mu,\ \epsilon(P^\mu) = 0,\ S(P^\mu) = -P^\mu \tag{6}$$

i sad vidimo da upravo ovakav koprodukt daje Leibnitzovo pravilo

$$\begin{aligned} P^\mu \triangleright (ab) &= (P^\mu \triangleright a)(1 \triangleright b) + (1 \triangleright a)(P^\mu \triangleright b) \\ &= (P^\mu \triangleright a)b + a(P^\mu \triangleright b) \end{aligned} \tag{7}$$

a očekujemo da P^μ djeluje kao derivacija.

Isti koalgebarski sektor očekivano imaju i $M^{\mu\nu}$. Točno ovakva koalgebarska struktura naziva se *primitivnom*. Lako je pokazati da u ovom slučaju vrijedi $\Delta([a,b]) = [a,b] \otimes 1 + 1 \otimes [a,b]$, što znači da svaku Liejevu algebru možemo gledati kao posebni slučaj Hopfove. Također treba spomenuti da ćemo raditi s tzv. univerzalnom omotačkom algebrom $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ koja je slobodna tenzorska algebra generirana elementima $\mathcal{P}$ do na komutacijske relacije. To radimo zato da možemo konzistentno raditi s tenzorskim produktima, a i definirati zakretanje.

III. MOYALOV PROSTOR

A. Definicija

Najjednostavnija deformacija je *kanonska* deformacija dana relacijama

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu} \tag{8}$$

s realnim, konstantnim antisimetričnim tenzorom $\theta^{\mu\nu}$. Ovo definira *Moyalov prostor*. Zabrinjavajuće je ipak što ovo nije Lorentz invarijantno, no samo ako naivno očekujemo da se nekomutativni $\hat{x}^\mu$ transformiraju na poznat način. Pokazat ćemo suprotno.

Prva stvar za primijetiti je da se ovdje radi o nekomutativnoj algebri razapetoj umnošcima oblika $\hat{x}^{\mu_1} \cdots \hat{x}^{\mu_n}$ (nazovimo ju $\hat{\mathcal{A}}_{\hat{x}}$) i da bi na nju trebala djelovati deformirana Poincaréova algebra. Umjesto da radimo s poljem $k = \mathbb{C}$, možemo sve definirati nad formalnim redovima $k[[\lambda]]$ u nekom parametru λ, koji označava karakterističnu duljinu deformacije, tj. Planckovu skalu. Ako formalno uzmemo $\lambda \to 0$, trebamo dobiti prostor Minkowskog, uz $\theta^{\mu\nu} = \mathcal{O}(\lambda^2)$. Ovime također pitanja konvergencije redova "guramo pod tepih".

B. $\star$-produkt

Zbog nekomutativnosti ne možemo naći neki izomorfizam $\hat{\mathcal{A}}_{\hat{x}} \to$ "$\mathcal{A}_x$", gdje je $\mathcal{A}_x$ komutativna algebra funkcija nedeformiranih x-eva. Međutim, možemo na $\mathcal{A}_x$ uvesti nekomutativno množenje. Dakle, tražimo izomorfizam algebri

$$\hat{f}(\hat{x})\hat{g}(\hat{x}) \overset{\cong}{\to} f(x) \star g(x) \tag{9}$$

Novu algebru nazovimo ${\mathcal{A}^\star}_x$. Ovaj izomorfizam ovisi o izboru baze odnosno uređenju $\hat{\mathcal{A}}_{\hat{x}}$. Pokušajmo definirati $\star$-produkt kao neka vrsta generalizirane konvolucije. Ovaj postupak, tzv. Weyl-Wignerova transformacija, nije nov [11]. Ovakva ista konstrukcija je prvi put uvedena pri potpuno analognom proučavanju nekomutativnog faznog prostora nerelativističke kvantne mehanike, i $\star$-produkt se u tom kontekstu zove Groenewoldov produkt. Uvedimo *Weylov* transformat

$$\mathcal{W}(f)(\hat{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tilde{f}(k) \tag{10}$$

gdje je $\tilde{f}(k)$ obični Fourierov transformat, ako postoji. Njen inverz je Wignerov transformat

$$\mathcal{W}^{-1}(\hat{F})(x) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-ik_\mu x^\mu} \mathrm{Tr}_{\hat{x}} \hat{F}(\hat{x}) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \tag{11}$$

Sad definiramo i računamo $\star$-produkt

$$\begin{aligned} f \star g &= \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{W}(f)\mathcal{W}(g)) && (12)\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-ik_\mu x^\mu} \mathrm{Tr}_{\hat{x}} \int \frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mathrm{d}^n q}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ &\quad e^{i(p_\mu + q_\mu)\hat{x}^\mu} e^{\frac{i}{2} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{f}(p)\tilde{g}(q) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} && (13)\\ &= \int \frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mathrm{d}^n q}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{i(p_\mu + q_\mu)x^\mu} e^{\frac{i}{2} p_\mu q_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{f}(p)\tilde{g}(q) && (14)\\ &= e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial y^\nu}} f(x) g(y)|_{y \to x} && (15) \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili BCH formulu $e^{ip_\mu \hat{x}^\mu} e^{iq_\nu \hat{x}^\nu} = e^{i(p_\mu + q_\mu)\hat{x}^\nu + i/2 [p_\mu \hat{x}^\mu, q_\nu \hat{x}\nu]}$. Može se pokazati da je ovo asocijativno množenje, te da ovo odgovara simetričnom uređenju, dakle $x^{\mu_1} \cdots x^{\mu_n}$ odgovara $\hat{x}^{(\mu_1} \cdots \hat{x}^{\mu_n)}$ [12].

C. Zakretanje i deformirana Poincaréova algebra

Definiramo li lijevo djelovanje nedeformirane $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ na $\mathcal{A}_x$ kao

$$P_\mu \triangleright f(x) = i\partial_\mu f(x) \tag{16}$$
$$M_{\mu\nu} \triangleright f(x) = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) f(x) \tag{17}$$

vidimo da imamo samo drugačije zapisano

$$\begin{aligned} f \star g &= m \circ e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} P_\mu \otimes P_\nu} \triangleright (f(x) \otimes g(y)) && (18)\\ &\equiv m \circ \mathcal{F}^{-1} \triangleright (f(x) \otimes g(y)) && (19) \end{aligned}$$

gdje smo definirali operator $\mathcal{F}^{-1} \in \mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$ kojeg nazivamo **zakretanje** (*eng.* twist). Sad treba naći deformiranu Poincaréovu algebru, pa promotrimo njeno djelovanje. Uzmimo neki $h \in \hat{\mathcal{U}}(\mathcal{P})$. Tada

$$\begin{aligned} h \triangleright (f \star g) &= h \triangleright \big(m \circ \mathcal{F}^{-1} \triangleright (f \otimes g)\big) && (20)\\ &= m \circ \big(\Delta(h)\mathcal{F}^{-1} \triangleright (f \otimes g)\big) && (21)\\ &\overset{!}{=} m_\star \circ (\Delta_\star(h) \triangleright (f \otimes g)) && (22) \end{aligned}$$

U zadnjem redu smo napisali kako početan izraz mora izgledati da ovo bude djelovanje Hopfove algebre. Vidimo da moramo definirati novi produkt $m_\star = m \circ \mathcal{F}^{-1}$ na $\mathcal{A}_x$ (što smo već napravili i time dobili $\mathcal{A}_x^\star$), no i novi koprodukt

$$\Delta_\star = \mathcal{F}\Delta\mathcal{F}^{-1} \tag{23}$$

Ovime smo precizirali deformiranu algebru $\hat{\mathcal{U}}(\mathcal{P})$, čiji se koalgebarski sektor promijenio. Konzistentnost s definirajućim relacijama određuje kako se antipod mijenja, dok kojedinica i algebra ostaju iste. Čitatelja za detalje opet upućujemo na [9]. Osim toga zakretanje zadovoljava određene relacije koje osiguravaju da novo množenje ostane asocijativno.

Promotrimo li sad $f(x) = x^\mu$, $g(x) = x^\nu$, dobivamo

$$x^\mu \star x^\nu = x^\mu x^\nu + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu} \tag{24}$$
$$\Rightarrow [x^\mu, x^\nu]_\star \equiv x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu} \tag{25}$$

Dakle, nova algebra ima iste komutacijske relacije kao početna. Osim toga, ovo je očito izomorfizam. Koristeći BCH formulu u varijanti

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[A, [A, \ldots [A,}_{n} B]] \tag{26}$$

nalazimo novi koalgebarski sektor

$$\begin{aligned} \Delta_\star P_\mu &= P_\mu \otimes 1 + 1 \otimes P_\mu && (27)\\ \Delta_\star M_{\mu\nu} &= M_{\mu\nu} \otimes 1 + 1 \otimes M_{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta}[(\eta_{\alpha\mu}P_\nu - \eta_{\alpha\nu}P_\mu) \otimes P_\beta \\ &\quad + P_\alpha \otimes (\eta_{\beta\mu}P_\nu - \eta_{\beta\nu}P_\mu)] && (28) \end{aligned}$$

Pritom smo nastavili pisati ove generatore istim simbolima kao prije. Međutim, može se pokazati [13] da za simetrične funkcije $f_n^\star(x) = x^{(\mu_1} \star \cdots \star x^{\mu_n)}$ djelovanje $M^{\mu\nu} \triangleright f_n^\star(x)$ izgleda potpuno isto kao nedeformirana verzija, samo s novim produktima. Znači da je "dužina" $x_\mu \star x^\mu$ invarijantna. Može se pokazati i da je sama definirajuća komutacijska relacija invarijantna. Poincaré invarijantnost je dakle očuvana, iako grupa djeluje drugačije.

D. Prema teoriji polja

Budući da je algebarski sektor nepromijenjen, čestični sadržaj QFT na Moyalovom prostoru isti je kao na prostoru Minkowskog. Slobodna teorija je ista te do razlika dolazi tek u interakcijama, jer vrijedi

$$\int \mathrm{d}^n x f_1(x) \star \cdots \star f_k(x) = \mathrm{Tr} W(f_1) \cdots W(f_k) \tag{29}$$

dakle sve je isto za kvadratični lagranžijan. S druge strane, u $\phi_\star^4$ teoriji vrh ima dodatan faktor. Promotrimo

interakciju:

$$S_{\text{int}} = \int \mathrm{d}^n x \frac{\lambda}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \tag{30}$$

$$= \int \mathrm{d}^n x \frac{\lambda}{4!} \int \frac{\Pi_i \mathrm{d}^n k_i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \Pi_i \phi(k_i) \tag{31}$$

$$e^{ik_1^\mu x_\mu} \star e^{ik_2^\mu x_\mu} \star e^{ik_3^\mu x_\mu} \star e^{ik_4^\mu x_\mu} \tag{32}$$

$$= \int \mathrm{d}^n x \frac{\lambda}{4!} \int \frac{\Pi_i \mathrm{d}^n k_i}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \Pi_i \phi(k_i) \tag{33}$$

$$e^{i \sum_i k_i^\mu x_\mu} e^{-\frac{i}{2} \sum_{i<j} \theta_{\mu\nu} k_i^\mu k_j^\nu} \tag{34}$$

Dakle, vrh ima dodatan oscilatorni faktor

$$V(k_1, \ldots, k_4) = \prod_{i<j} e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu} k_i^\mu k_j^\nu} \tag{35}$$

što znači da se osim planarnih dijagrama javljaju i neplanarni dijagrami, u kojima ovisnost vrhova o internim impulsima u petljama dovode do UV-IR miješanja divergencija teorija [14, 15]. Treba napomenuti da unitarnost S-matrice traži $\theta^{0\mu} = 0$, dakle da se nekomutativnost javlja samo u "prostornom" dijelu.

Komutacijske relacije za operatore stvaranja i poništenja se također mijenja i postaje Zamolodichkov-Faddeev algebra [16]. Čestične statistike se također mijenjaju, tako da operator zamijene $\tau(A \otimes B) = B \otimes A$ sad postaje $\tau_\star = \mathcal{F}\tau\mathcal{F}^{-1}$ [17]. To znači da bozone na primjer definiramo kao

$$\psi_1 \otimes \psi_2 = \tau_\star(\psi_1 \otimes \psi_2) \tag{36}$$

Konstrukcija nekomutativne baždarne teorije bi nas odvela predaleko, pa upućujemo čitatelja na [4, 20].

IV. κ-MINKOWSKI

A. Definicija

U prošlom smo dijelu promotrili deformaciju algebre koordinata i naveli posljedice na Poincaréovu algebru koja na nju djeluje. Moguće je, međutim, početi s deformacijom Poincaréove Hopfove algebre pa naći prostor na kojeg djeluje kovarijantno. Tako je povijesno prostor κ-Minkowskog izveden iz algebarske i koalgebarske deformacije Poincaréove algebre dane u *Majid-Rueggovoj* bazi kao njena dualna Hopf algebra. S ovime smo se već sreli pri dualnom uparivanju koalgebre funkcija nad nekom grupom sa samom tom grupom. Detalji se mogu naći u [18, 19]. κ-Minkowski se definira algebrom

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \frac{i}{\kappa}\left(\hat{x}^\mu a^\nu - \hat{x}^\nu a^\mu\right) \tag{37}$$

gdje je a^μ konstantni, bezdimenzionalni vektor koji određuje "smijer" deformacije, a $1/\kappa$ parametar koji odgovara Planckovoj duljini. a^μ se normalizira na ± 1 ili 0 te se govori, ovisno o metrici, o vremenolikoj, nul ili tahionskoj deformaciji. κ-Minkowski je primjer Lie-algebarske deformacije prostora.

B. $\star$-produkt i zakretanje

Analizu je moguće napraviti analogno prethodnoj ako opet uvedemo $\star$-produkt i pripadno zakretanje. No ovako dobiveni koprodukti ispadaju komplicirani i nepraktični, pa se nelinearnom promijenom baze

$$\begin{aligned} P_\mu &\mapsto \hat{P}_\mu = \hat{P}_\mu(P_\mu) \\ M_{\mu\nu} &\mapsto \hat{M}_{\mu\nu} = \hat{M}_{\mu\nu}(M_{\mu\nu}, P_\mu), \end{aligned} \tag{38}$$

dio deformacije može prenijeti u algebarski sektor i dobiti već spomenutu Majid-Rueggovu bazu ili koju drugu. Nalazi se, međutim, da to nije cijela priča jer zakretanje klasične Poincaréove algebre iz $\mathcal{U}(\mathcal{P}) \otimes \mathcal{U}(\mathcal{P})$ neće moći dovesti do κ-Minkowski prostora kao njenog modula [21]. Umjesto toga, algebra se proširuje na dva načina. S jedne strane se algebra može proširiti na $\mathfrak{igl}(n)$ s generatorima reprezentiranim s $P_\mu = i\partial_\mu$ i $L_{\mu\nu} = ix_\mu\partial_\nu$. Očito je $\mathcal{P}$ sada podalgebra. Tzv. *Abelovo zakretanje* se sad definira samo pomoću elemenata abelove podalgebre razapete P_μ. S druge strane se algebra može minimalno proširiti uvođenjem dilatacijskog operatora $D = x^\mu\partial_\mu$ na Poincaré-Weylovu algebru, što vodi do tzv. *Jordanovog zakretanja* koje sadrži P_μ i D [22]. Ovo je vjerojatno bolji način jer je izuzev Higgsovog sektora standardni model zapravo Poincaré-Weyl invarijantan.

C. Konstrukcija teorije polja

Dobiti teoriju polja iz $\star$-produkta je u ovom slučaju teže. Naime, budući da su komutacijske relacije linearne u $\hat{x}$, BCH formula ne završava nakon konačno mnogo članova. Općenito, dakle, imamo

$$\begin{aligned} f \star g = \int \frac{\mathrm{d}^n p}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\mathrm{d}^n q}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\ e^{i(p_\mu + q_\mu)x^\mu + \frac{i}{2}\phi_\mu(p,q)x^\mu} \tilde{f}(p)\tilde{g}(q) \end{aligned} \tag{39}$$

gdje je $\phi_\mu(p, q)$ nelinearna funkcija p^μ, q^μ i strukturnih konstanti.

Općenito, prirodan način konstrukcije akcije je pomoću koncepata iz diferencijalne algebre, koju treba poopćiti na nekomutativni slučaj. To znači da treba definirati deformiranu vanjsku algebru $\Omega^\bullet = \oplus_i \Omega^i$ i na njoj vanjsku derivaciju $\mathrm{d} : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$, vanjski produkt $\wedge : \Omega^\bullet \otimes \Omega^\bullet \to \Omega^\bullet$ i Hodgeov dual $(\_)^\star : \Omega^i \to \Omega^{n-i}$, gdje je n dimenzija prostora. Tada bi akcija glasila za skalarno polje formalno glasila

$$S = \int \mathrm{d}\phi \wedge (\mathrm{d}\phi)^\star + m^2 \phi \wedge (\phi)^\star \tag{40}$$

gdje su sva polja, operatori i množenja deformirana.

Prirodna Lie-algebarska struktura ovakvih deformacija omogućava poopćenje algebre na superalgebru u koju uključujemo i bazične 1-forme. To je ključ takvog pristupa. Neki od rezultata na tom tragu su modificirana

disperzijska relacija [24]

$$\omega^2 - c^2k^2 = \frac{m^2c^4}{\hbar^2}\left(1 - \frac{\omega}{c\kappa}\right) \tag{41}$$

kao i modicifiran Planckov zakons

$$E = \frac{\hbar\omega}{1 - \frac{\omega}{c\kappa}} \tag{42}$$

što su efekti koji bi se u principu mogli detektirati iz CMB-a.

Opsežna diskusija o problemima ovakvog pristupa pri na primjer čuvanju kovarijantnosti ovih struktura nalazi se u [23]. Dodatna komplikacija je na primjer i nužnost zakretanja s vrijednostima u superalgebri.

V. GENERALNE DEFORMACIJE

Predstavit ćemo i konstrukciju općenitijih deformacija. Počevši s Heisenbergovom algebrom $\mathcal{H}$ danom kanonskim komutacijskim relacijama $[x_\mu, p_\nu] = -i\eta_{\mu\nu}$, $[x_\mu, x_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0$, uvedimo nelinearnu promjenu baze

$$\hat{x}_\mu = x_\alpha \phi^\alpha{}_\mu\left(\frac{p}{M}\right) + \frac{1}{M}\chi_\mu\left(\frac{p}{M}\right) \tag{43}$$

gdje je $M \approx m_{\text{Planck}}$ energetska skala. Ovo vodi do deformirane Heisenbergove algebre koja očito uključuje već promatrane slučajeve:

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = \frac{i}{M}\hat{x}_\alpha C_{\mu\nu}{}^\alpha\left(\frac{p}{M}\right) + \frac{i}{M^2}c\left(\frac{p}{M}\right) \tag{44}$$

$$[p_\mu, \hat{x}_\nu] = -i\phi_{\mu\nu}\left(\frac{p}{M}\right), \quad [p_\mu, p_\nu] = 0 \tag{45}$$

Funkcije $C_{\mu\nu}{}^\alpha$ i $C_{\mu\nu}{}^\alpha$ se lako daju izraziti pomoću $\phi_{\mu\nu}$ i χ_μ. Svi detalji ove konstrukcije nalaze se u [25], a mi ćemo istaknut tek nekoliko detalja. Prije svega, primjetimo da smo sada dozvolili da komutator ovisi i o momentima. Prostor kojeg je originalno promatrao Snyder, nazvan njemu u čast, definira relacija

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = iM_{\mu\nu} \tag{46}$$

štp očito možemo iz ovog pristupa reproducirati [26].

Nastavljamo kao prije. Prvo definiramo lijevo djelovanje nedeformirane Heisenbergove algebre na algebru koju razapinju x^μ:

$$f(x) \triangleright g(x) = f(x)g(x) \tag{47}$$

$$p_\mu \triangleright f(x) = [p_\mu, f(x)] \triangleright 1 \tag{48}$$

što odgovara reprezentaciji $p_\mu = -i\partial_\mu$. Tada se pokaže da vrijedi ovakav oblik djelovanja deformirane algebre

$$e^{ik\cdot\hat{x}} \triangleright 1 = e^{iK(k)\cdot x + ig(k)} \tag{49}$$

što znači da svakoj Fourier-transformabilnoj funkciji $f(x)$ možemo pridijeliti element $\hat{f} \in \mathcal{H}$ takav da $\hat{f} \triangleright 1 = f(x)$. Konstrukcija je slična kao dosad, treba samo odabrati $\hat{f} = \int \mathrm{d}^4\mu(k)\tilde{f}(k)e^{ik\cdot\hat{x}}$, gdje je $\tilde{f}$ Fourierov transformat od $f(x)$, a $\mu(k)$ neka odgovarajuća mjera. Tada konstruiramo $\star$-produkt kao

$$f(x) \star g(x) = (\hat{f}\hat{g}) \triangleright 1 \tag{50}$$

Nadalje imamo

$$e^{ik\cdot x} \star e^{iq\cdot x} = e^{i\mathcal{D}_\mu(k,q)x^\mu + i\mathcal{G}(k,q)} \tag{51}$$

iz čega definiramo generalizirano zbrajanje momenata $(k \oplus q)_\mu = \mathcal{D}_\mu(k,q)$, te koprodukt $\Delta p_\mu = \mathcal{D}_\mu(p \otimes 1, 1 \otimes p)$. Iz ovoga se može naći i zakretanje, no samo ćemo još prokomentirati Poincaré invarijantnost teorije.

Slijedeći [25], uvedimo nelinearnu transformaciju

$$P_\mu = \Sigma_\mu(p), \quad X_\mu = x_\alpha \Psi^\alpha{}_\mu(p) + h_\mu(p) \tag{52}$$

tako da $\{P_\mu, X_\mu\}_\mu$ zadovoljavaju kanonske komutacijske relacije. To znači da možemo uvesti $M_{\mu\nu} = X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu$ i dobiti nedeformiranu Poincaréovu algebru. Infinitezimalna Lorentzova transformacija s rapiditetima $\omega_{\mu\nu}$ sad do prvog reda glasi

$$P'_\mu = P_\mu + \omega_\mu{}^\alpha P_\alpha \tag{53}$$

Odnosno, izraženo pomoću originalnih momenata,

$$p'_\mu = \Sigma_\mu^{-1}\left(\Sigma_\mu(p) + \omega_\mu{}^\alpha \Sigma_\alpha(p)\right) \tag{54}$$

$$= p_\mu + \omega^{\alpha\beta}\Sigma_\beta(p)\partial_\alpha \Sigma_\mu^{-1}(p) \equiv \Lambda_\mu(\omega, p) \tag{55}$$

gdje smo se zadržali na prvom redu u rapiditetu. Ovo znači da se zbroj momenata ne transformira kao zbroj transformiranih momenata, što ima ozbiljne implikacije na konzistentnost teorije! Na primjer, proces kinematički zabranjen u jednom sustavu može postati dozvoljen u drugom. Stoga se svaki moment treba transformirati vlastitim rapiditetom

$$\Lambda(\omega, k \otimes q) = \Lambda(\omega_1(k,q), k) \oplus \Lambda(\omega_2(k,q), q) \tag{56}$$

Za kraj, spomenimo i daljnje deformacije prostora. Koalgebre dobivene zakretanjem nisu kokomutativne, u smislu da

$$\sum a_{(i)} \otimes a_{(j)} \neq \sum a_{(j)} \otimes a_{(i)} \tag{57}$$

odnosno, izraženo pomoću već definiranog nedeformiranog flip operatora $\tau(A \otimes B) = B \otimes A$, $\tau \circ \Delta \neq \Delta$. Ipak, zakretanje definira tzv. kvantnu Yang-Baxter matricu koja kontrolira ovo odstupanje:

$$\tau \circ \Delta(a) = \mathcal{R}\Delta(a)\mathcal{R}^{-1} \tag{58}$$

gdje je $\mathcal{R} = (\tau \circ \mathcal{F})\mathcal{F}^{-1}$. Na sličan način bismo mogli definirati kvazi-Hopfovu algebru koja je koasocijativna do na konjugaciju s nekim elementom, uz njen dual koji na sličan način nije asocijativan, pa bismo radili fiziku na neasocijativnim i nekomutativnim prostorima. Ovaj niz bi se mogao nastaviti u nedogled, s kulminacijom koju bismo mogli nazvati Hopf_∞ algebra u stilu A_∞ algebri, no autor ne zna je li ovakav objekt već konstruiran.

VI. ZAKLJUČAK

Na temelju općih razmatranja, nekomutativne prostore možemo smatrati arenom za kvantnu fiziku na Planckovoj skali. Od svake teorije kvantne gravitacije očekuje se odmak od standardnog prostora Minkowskog bilo uvođenjem proširenih objekata (teorija struna) bilo uvođenjem nekakve diskretizacije (LQG). Ova nekomutativnost je značajna tek veoma visokim energijama, pa se glatka geometrija javlja kao emergentna struktura. U ovom pristupu to odgovara najobičnijem uzimanju limesa. Iako se ideja nekomutativnosti prostora javila davno, teorija je zapravo veoma nova i puna izazova. Mi smo htjeli pokazati samo neke osnove, posvetivši se najjednostavnijim slučajevima Moyalovog i κ-Minkowski prostora na kojima smo prokomentirali izgradnju teorija polja. Također, nismo pokazali skoro ništa od iznimno bogate teorije Hopfovih algebri. Ipak, nadam se da smo uspjeli dati istodobno i dovoljno opsežan i dovoljno kratak pregled nekomutativnih prostora i pristupa fizici na njima pomoću Hopfovih algebri.

ZAHVALE

Htio bih zahvaliti mentoru S. Meljancu na vremenu i na tome što me upoznao s ovim zanimljivim područjem.

[1] Snyder, H.S. "Quantized space-time." Physical Review 71.1 (1947): 38.

[2] Bandyopadhyay, P. (2013). *Geometry, topology and quantization* ß6, (Vol. 386). Springer Science Business Media.

[3] Lukierski, J. "Quantum Gravity models-brief conceptual summary." arXiv:1404.6797 (2014).

[4] Seiberg, N., Witten, E. "String theory and noncommutative geometry." Journal of High Energy Physics 1999.09 (1999): 032.

[5] Aguillón, C.A., et al. "Gravity from Quantum Spacetime by Twisted Deformation of the Quantum Poincaré Group." arXiv:1705.08959 (2017).

[6] Doplicher, S., Fredenhagen, K., Roberts, J.E. "The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields." Communications in Mathematical Physics 172.1 (1995): 187-220.

[7] de La Harpe, P., Jones, V.F.R. *An Introduction to C*-algebras* Université de Genève, Section de Mathématiques (1995)

[8] Arveson, W. *An invitation to C*-algebras.* Vol. 39. Springer Science Business Media (2012)

[9] Majid, S. *Foundations of quantum group theory.* Cambridge university press (2000)

[10] Nestruev, J. *Smooth manifolds and observables.* Vol. 220. Springer Science Business Media (2006)

[11] Aschieri, P. et al., *Noncommutative Spacetimes: Symmetries in Noncommutative Geometry and Field Theory*, Lect. Notes Phys. 774 Springer, Berlin Heidelberg (2009)

[12] Štrajn, R. "Field theory on noncommutative space". Diss. Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek, Sveučilište u Zagrebu (2011)

[13] Chaichian, M., et al. "On a Lorentz-invariant interpretation of noncommutative space–time and its implications on noncommutative QFT." Physics Letters B 604.1 (2004): 98-102.

[14] Wohlgenannt, M. "Introduction to Noncommutative QFT." predavanje dano na Vienna University of Technology (2010)

[15] Minwalla, S., Van Raamsdonk, M., Seiberg, N. "Noncommutative perturbative dynamics." Journal of High Energy Physics 2000.02 (2000): 020.

[16] Kulish, P. P. "Twists of quantum groups and noncommutative field theory." Journal of Mathematical Sciences 143.1 (2007): 2806-2815.

[17] Meljanac, S., et al. "Twisted statistics in Lie-deformed Minkowski spaces." arXiv:1703.09511 (2017)

[18] Lukierski, J. "Kappa-deformations: historical developments and recent results." Journal of Physics: Conference Series. Vol. 804. No. 1. IOP Publishing, (2017)

[19] Majid, S., Ruegg, H. "Bicrossproduct structure of -Poincaré group and non-commutative geometry." Physics Letters B 334.3-4 (1994): 348-354.

[20] Wess, J. "Deformed gauge theories." J. Phys. Conf. Ser. 53:752-763 (2006)

[21] Borowiec, A., Lukierski, J., and Pachoł, A. "Twisting and kappa-Poincaré." Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 47.40 (2014): 405203.

[22] Meljanac, S., et al. "Remarks on simple interpolation between Jordanian twists." Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical (2017).

[23] Jurić, T., et al. "Toward the classification of differential calculi on ." Journal of High Energy Physics 2015.7 (2015): 1-33.

[24] Aschieri, P., Borowiec, A., Pachoł, A. "Observables and dispersion relations in -Minkowski spacetime." Journal of High Energy Physics 2017.10 (2017): 152.

[25] Meljanac, S., et al. "Noncommutative spaces and Poincaré symmetry." Physics Letters B 766 (2017): 181-185.

[26] Meljanac, S., et al. "Snyder-type space–times, twisted Poincaré algebra and addition of momenta." International Journal of Modern Physics A 32.28n29 (2017): 1750172.