Pozitivnost energije i spinorijalne metode u OTR

Fran Globlek
Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu, p.p. 331, HR-10002 Zagreb, Hrvatska
(Dated: 17. ožujka 2017.)

Contents

1. Energija općenito i u OTR

- kad su očuvane veličine potrebne?
  - izolirani/zatvoreni sustav
  - sustavi u vanjskom polju
  - sustav koji zrači je kompliciraniji
- za klasično polje, bez gravitacije, energiju vežemo uz homogenost prostorvremena, tj vremenoliki Killing vektor t^a. Tenzor stresa T^{ab} je Nötherina struja, uz odgovarajuću energiju $E = \int_\Sigma T_{ab} n^a t^b$
- ${T^{ab}}_{,a} = 0$ je iskaz očuvanja energije
- ako dodamo gravitaciju, ${T^{ab}}_{;a} = 0$ je "lokalno očuvanje" (Lorentz vs difeomorfizmi!). Newtonovski gravitacijski potencijal odgovara metrici, pa bi energija odgovarala kvadratnoj formi njenih prvih derivacija. No lokalno, $\exists$ frame t.d. metrika η_{ab}.
- pseudotenzori t.d. $(T^{ab} + t^{ab})_{,a} = 0$

- primjena: tidal heating Jupiterovog mjeseca Io: $\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\int_\Sigma \mathrm{d}S_i\, t^{0i} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}^{ij}}{\mathrm{d}t}$ + (član ovisan o konstrukciji)

2. Konstrukcija pseudotenzora metodom superpotencijala

- počnimo od tzv. superpotencijala $U^{\mu\lambda\nu} = U^{[\mu\lambda]\nu}$
- očito $\partial_\mu\partial_\lambda\left(\sqrt{g}U^{\mu\lambda\nu}\right) = 0$
- definirajmo pseudotenzor

$$16\pi\sqrt{g}t^{\mu\nu} = -2\sqrt{g}G^{\mu\nu} + \partial_\lambda\left(\sqrt{g}U^{\mu\lambda\nu}\right)$$

slijedi $16\pi\sqrt{g}(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) = \partial_\lambda\left(\sqrt{g}U^{\mu\lambda\nu}\right)$, pa je $\partial_\mu(t^{\mu\nu} + T^{\mu\nu}) = 0$.

- Einstein, Landau-Lifschitz, Weinberg, Moeller,...

3. ADM energija

Definicija 3.1. Potpunu Riemann mnogostrukost (M^n, g) zovemo **asimptotski ravnom** (točnije, asimptotski euklidskom) ako postoji kompaktni $K \subset M^n$ tako da je $M - K$ difeomorfna $\mathbb{R}^n - B(0,1)$ i postoje koordinate u kojima je $g = g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ t.d.

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \mathcal{O}\big(r^{-p}\big)$$

$$r g_{ij,k} + r^2 g_{ij,kl} = \mathcal{O}\big(r^{-p}\big)$$

$$R(g) = \mathcal{O}\big(r^{-q}\big)$$

za neki $p > 0$ i $q > (n-2)/2$.

- Newtonska aproksimacija nam daje prirodnu definiciju mase:

$$g_{00} = -1 + 2\phi,\ g_{0i} = 0,\ g_{ij} = (1+2\phi)\delta_{ij}, \quad \Delta\phi = -4\pi\rho \tag{1}$$

  – za supp $\rho \in B(0,R)$, $\phi = \frac{M}{r} + \mathcal{O}\big(r^{-2}\big)$

$$M = \int_{\mathbb{R}^3}\rho = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\Delta\phi = -\lim_R \frac{1}{4\pi}\int_{S^2} n^i\nabla_i\phi \tag{2}$$

  – za Schwarzschild: $g^3 = \frac{\mathrm{d}r^2}{1-\frac{2m}{r}} + r^2\mathrm{d}\Omega^2$

- za bolju definiciju koristimo, jer je $\rho = T_{ab}n^a n^b$ lokalna gustoća energije koju vidi promatrač koji se giba ortogonalno na Σ

$${}^3R = 16\pi T_{ab}n^a n^b + K^{ij}K_{ij} - (K^i{}_i)^2, \text{ na } \Sigma \tag{3}$$

  – gdje $K_{ij} = n_{(i;j)}$ ekstrinzična zakrivljenost, proporcionalna Lie derivaciji g^3 u smjeru n^a

  – uz $\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\partial_j g_{li} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ij}\right)$:

$$\begin{aligned} {}^3R &= g^{ij}\left(\partial_k\Gamma^k{}_{ij} + \partial_j\Gamma^k{}_{ik}\right) + \dots &(4)\\ &= \frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}\left(\partial_k\partial_j g_{li} - \partial_j\partial_i g_{lk}\right) + \dots &(5)\\ &= \partial_j\left[g^{ij}g^{kl}\left(\partial_k g_{li} - \partial_i g_{lk}\right)\right] + \dots &(6)\end{aligned}$$

– budući da je $g^{ij} = \delta^{ij} + \mathcal{O}(r^{-1})$, vodi do ADM energije:

$$16\pi\sqrt{g}\rho = \sqrt{g}^3 R = \partial_j \left[\delta^{ij}\delta^{kl}\left(\partial_k g_{li} - \partial_i g_{lk}\right)\right] \tag{7}$$

$$E \equiv \frac{1}{16\pi}\lim_{r\to\infty}\int_{S^2} \mathrm{d}S_r\, n^j \left(\partial_k g_{kj} - \partial_j g_{kk}\right) \tag{8}$$

- nužno asimptotski ravno!
  – Kasner: $g = -\mathrm{d}t^2 + \sum_i t^{2p_i}\mathrm{d}x_i^2$, uz $\sum p_i = \sum p_i^2 = 1$
- baždarno invarijantno: za $x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu$, $g_{ij} \to g_{ij} - \xi_{i,j} - \xi_{j,i}$

$$\delta E = \int_{S^2} \mathrm{d}S_r\, n^j(\xi_{k,j} - \xi_{j,k})_{,k} = \int \mathrm{d}^3x(\xi_{k,j} - \xi_{j,k})_{,kj} = 0 \tag{9}$$

- za n dimenzija predfaktor glasi $\frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}}$, $\omega_{n-1} \equiv \mathrm{Vol}(S^{n-1})$
- za k krajeva (povezanih podskupova $M - K$), svaki kraj ima masu E_k
- definiramo i ADM moment

$$P_i = \frac{1}{8\pi}\lim_r \int_{S_r} \mathrm{d}S_r\, \pi_{ij} n^j, \quad \pi_{ij} = K_{ij} - K^i{}_i g_{ij} \tag{10}$$

Propozicija 3.1. *Neka je κ kraj asimptotski ravne (M, g_{ij}). Ako je R integrabilan na kraju odnosno*

$$\int_\kappa \mathrm{d}vol\, R < \infty$$

tada je ADM energija (jedinstvena?) i konačna.

4. Bondi-Metzner-Sachs grupa

- beskon. dim. grupa asimptotske simetrije

$$x^\mu \mapsto \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + c^\mu(\phi, \theta) + \mathcal{O}(r^{-1})$$

- supertranslacije
- BMS grupa je grupa simetrija S matrice (Strominger 2013.)

5. Veza s ADM hamiltonijanom

- uvodimo folijaciju globalno hiperboličkog (M, g) Cauchyjevim površinama Σ_t parametriziranu globalom vremenskom fjom t. Inducirana metrika je

$$h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$$

- za t^a t.d. $t^a \nabla_a t = 1$, uvodimo lapse fju i shift vektor

$$N = -t^a n_a \quad \text{odgovara izboru folijacije } \Sigma_t$$

$$N^a = h^{ab} t_b \quad \text{odgovara izboru koordinata}$$

- ADM hamiltonijan:

$$\mathcal{H}_{\text{ADM}} = \frac{1}{16\pi}\left\{\int_{\Sigma_t}\sqrt{h}\mathrm{d}^3x(NC_0 + N^iC_i) - 2\int_{\partial\Sigma_t}\mathrm{d}^2x\left(N\sqrt{\sigma}k - N_a\pi^{ab}r_b\right)\right\}$$

- varijacija po N, N^a daje hamiltonijansko i impulsno ograničenje

$$C^0 = {}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 0, \quad C_i = D_jK^j{}_i - D_iK$$

- na prostornoj beskonačnosti za asimptotski inercijalnog opažača uzimamo $N^i = 0$, $N = 1$ i promatramo izraz

$$E \stackrel{?}{=} -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Sigma_t}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}k$$

- za 2-sferu, imamo $h_{ij} = r^2\mathrm{d}\Omega^2$ pa je

$$k = \frac{1}{2}h^{ij}(\partial_r h_{ij}) = \frac{1}{r}h^{ij}h_{ij} = \frac{2}{r}$$

- dakle,

$$E = -\lim_r\frac{1}{8\pi}\int_{S^2}\mathrm{d}^2x\sqrt{\sigma}k = -\lim_r\frac{1}{8\pi}\int_{S^2}r^2\mathrm{d}\Omega\frac{2}{r} = -\lim_r r$$

- redefinicija:

$$E \equiv -\lim_r\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Sigma_t}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}(k - k^0)$$

- oduzimamo izometrijsko uronjenje, dakle u ravni prostor
- uzmimo koordinate oko $\partial\Sigma$

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}r^2 + h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \tag{11}$$

$$(ds^0)^2 = -\mathrm{d}\rho^2 + h^0_{ij}\mathrm{d}y^i\mathrm{d}y^j \tag{12}$$

  i odaberimo difeomorfizam t.d. se normale poklapaju na $\partial\Sigma$: $r = \rho, x^i = y^i$.

- stavimo $\gamma_{ij} = h_{ij} - h^0_{ij}$ i primijetimo da ADM energija zapravo glasi

$$E_{\text{ADM}} = \lim_r\frac{1}{16\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}\left(D_j\gamma_{ij} - D_i\mathrm{tr}\gamma\right)r^i$$

  te da je $\gamma_{ij} \stackrel{\partial\Sigma}{=} 0$.

- pišemo $r^iD_j\gamma_{ij} = D_j(\gamma_{ij}r^i) - \gamma_{ij}D_jr^i \stackrel{\partial\Sigma}{=} 0$, pa

$$E_{\text{ADM}} = \lim_r\frac{1}{16\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}\left(-D_i\mathrm{tr}\gamma\right)r^i = -\lim_r\frac{1}{16\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}h^{ij}\gamma_{ij,r}$$

- s druge strane, $k = \frac{1}{2}h^{ij}\pounds_n h_{ij} = \frac{1}{2}h^{ij}h_{ij,r}$, pa

$$E = -\lim_r\frac{1}{8\pi}\int_{\partial\Sigma_t}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}(k - k^0) = -\lim_r\frac{1}{16\pi}\int_{\partial\Sigma_t}\mathrm{d}^2\theta\sqrt{\sigma}h^{ij}\gamma_{ij,r}$$

6. Alternativne definicije energije

- akceleracija duž Killing orbite je $a^b = (\xi^a/V)\nabla_a(\xi^b/V) = V^{-2}\xi^a\nabla_a\xi^b$
- Komarova energija

$$E \equiv -\frac{1}{8\pi}\lim\int \varepsilon_{abcd}\nabla^c\xi^d \tag{13}$$

- ovisi o odabiru ξ^a. Dobar gauge-fixing je $\nabla^a\xi_a = 0$.
- može se pokazati da odgovara ADM slučaju ako $\xi^a = n^a$
- Bondijeva energija - radijacija; zadovoljava

$$\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{BS}}}{\mathrm{d}t} = -\int_{\Sigma_t}\mathrm{d}^2x\sqrt{\sigma}F$$

7. Pozitivnost energije

- za skaliranje $g \to \lambda^2 g$, $E \to \lambda E$. Dakle ili je energija $E \geq 0$, ili nema donju granicu
- problem je prvo riješen za slučajeve $d < 8$, zatim za slučajeve da je mnogostrukost spin, pa nedavno (možda) za sve
- sveukupno > 4 različita dokaza:
  - Schoen & Yau, 1979. - minimalne hiperpovršine
  - Witten, 1981. - spinori
  - Huisken & Ilmanen 2001. - Riemann-Penrose nejednakost
  - Lohkamp, 2006. - iskaz teorema kao: Ne postoji potpuna mnogostrukost (M, g) s $R > 0$ u unutrašnjosti nekog kompaktnog skupa $K \subset M$ t.d. ima $E < 0$ i $(M - K, g)$ je izomorfna $(\mathbb{R}^n - B_r(0), \delta)$.
- zanimljive posljedice:
  - Yamabeova konjektura: $\forall\ g$ na kompaktnom $\mathcal{M}$ $\exists$ strogo pozitivna f-ja ϕ t.d. ϕg ima konstantnu skalarnu zakrivljenost
  - Bunting & Masood-ul-Alam: horizonti događaja u regularnim, statičnim vakuum crnim rupama su povezani

8. Uobičajene pretpostavke

- energiju želimo odrediti na nekoj spacelike hiperpovršini (M^3, g, K). Na njoj vrijede

$$\rho = \frac{1}{8\pi}G^{00} = \frac{1}{16\pi}\left[R - K^{ij}K_{ij} + {K^i}_i^2\right] \tag{14}$$

$$J^i = \frac{1}{8\pi}G^{0i} = \frac{1}{8\pi}\nabla_j\left[K^{ij} - {K^k}_k g^{ij}\right] \tag{15}$$

  i **dominant energy condition**

$$\rho \geq \sqrt{J^i J_i}$$

- u slučaju $K_{ij} = 0$, imamo $R \geq 0$. Razumna pretpostavka ako gledamo hiperpovršinu kao $t = 0$ krišku prostorvremena, simetričnu u t, odnosno **statičnu.**

Lema 8.1. *Neka je (M, g) takav da postoji izometrija $\phi : M \to M$ koja ostavlja fiksnom točke podmnogostrukosti N (kao $t \mapsto -t$!). Tada je N* ***totalno geodezična*** *podmnogostrukost (što znači da su geodezici na N također i geodezici na M).*

Dokaz. Pp. suprotno. Tada ϕ šalje geodezik γ u $\phi^*\gamma \neq \gamma$, no oni prolaze kroz istu točku na $\gamma \cap N$, što je kontradikcija. $\square$

- komentar: geodezici se slažu na N, no to ne znači da je geodezik na M "iste duljine" - promotri otvoreni disk u $\mathbb{R}^2$
- iz ovog treba zaključiti da je $K_{ab} = 0$
- prvo, definirajmo induciranu metriku
$$h_{ij} = g_{ab} e^a_i e^b_j,$$
$e^a_i \equiv \frac{\partial x^a}{\partial y^i}$ i općenito za svaki tenzor $A^{ij\cdots} = A^{ab\cdots} e^i_a e^j_b \cdots$. Primjetimo da je ovo tenzor na N, ali je skalar na $x^a \mapsto x'^a$. Uvijek vrijedi $A^{ab\cdots} n_a = 0$ jer $n_a e^a_i = 0$. U koordinatama na M vrijedi
$$h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b.$$
- promatramo projekciju kovarijantne derivacije:
$$\begin{aligned} A^a{}_{;b} e^b_j &= \left(n^a n_c + h^{im} e^a_i e_{mc}\right) A^c{}_{;b} e^b_j && (16)\\ &= (n_c A^c{}_{;b} e^b_j) n^b + h^{im} (A_{c;b} e^c_m e^b_j) e^a_i && (17)\\ &= -(A^c n_{c;b} e^b_j) n^b + h^{im} A_{m|j} e^a_i && (18)\\ &= A^i{}_{|j} e^a_i - A^i (n_{c;b} e^b_j e^c_i) n^b && (19) \end{aligned}$$
- tvrdimo da je $K_{ij} = n_{a;b} e^a_i e^b_j$, tj samo moramo dokazati da je simetričan:
$$\begin{aligned} n_{a;b} e^a_i e^b_j &= -n_a e^a_{i;c} e^b_j && (20)\\ &= -n_a e^a_{j;c} e^b_i && (21)\\ &= n_{a;b} e^a_j e^b_i && (22) \end{aligned}$$
gdje smo koristili ortogonalnost n^a i e^a_i te Liejev transport vektora baze
- iz slaganja geodezika i slaganja kovarijantnih derivacija slijedi $K_{ij} = 0$
- općenito, za polja tangentna istoj hiperpovršini, $\nabla_u v = D_u v + K(u,v) n$

9. Schoen-Yau dokaz

- pp. da je $m < 0$ i $R \geq 0$ (također $K^i{}_i = 0$)
- 1. korak: konstrukcija konformalne metrike t.d. $R > 0$ izvan kompaktnog skupa
- 2. korak: kontrukcija minimalne površine
- 3. korak: $\int \left(R - K_{\text{Gauß}} + \frac{1}{2} \sum K^2_{ij}\right) \leq 0$, ali $\int K_{\text{Gauß}} \leq 0$.
- za opći slučaj, deformacija metrike $\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + f_i f_j$ gdje (Jangova jdba)
$$\tilde{g}^{ij} \tilde{K}_{ij} = \left(g^{ij} - \frac{f_i f_j}{1 + |\nabla f|_g}\right) \left(\frac{f_i f_j}{K_{ij} + \sqrt{1 + |\nabla f|_g}}\right) = 0$$
- vrijedi za $n \leq 7$

10. Superharmoničke funkcije

- za $(\mathbb{R}^3, u(x)^4\delta)$ s asimptotikom $u(x) = a + b/|x| + \mathcal{O}\big(|x|^{-2}\big)$, $m = 2ab$
- za ovaj slučaj vrijedi $R = -8u(x)^{-5}\Delta u(x)$
- za $u(x) > 0$, $\Delta u(x) \leq 0$ pa $u(x)$ superharmonička
- ako pretp. da je $u(x)$ harmonička izvan kompaktnog skupa, ima razvoj u sferične harmonike, što je asimptotika koju smo maloprije pretpostavili
- harmoničnost znači da je minimum $u(x)$ a, dakle $b \geq 0$ i $m \geq 0$

11. Grafovi na $\mathbb{R}^n$

- (G. Lam 2011.) promatramo grafove realnih $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ koje od $\mathbb{R}^{n+1}$ u kojeg su embeddane nasljeđuju metriku izometričnu $\delta_{ij} + f_i f_j$
- komentar: Schwarzschild metriku možemo zapisati u “izotermalnim koordinatama”:

$$-\left(\frac{1 - \frac{m}{2r^{n-2}}}{1 + \frac{m}{2r^{n-2}}}\right)^2 \mathrm{d}t^2 + \left(1 + \frac{m}{2r^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta_{(n\times n)}$$

- $(\mathbb{R}^3 - B(0, m/2), (1 + \frac{m}{2r})^4\delta)$ se može realizirati kao embedding grafa

$$r = \frac{\tau^2}{8m} + 2m$$

  u $\mathbb{R}^4$
- svaku sferično simetričnu metriku možemo prikazati kao graf
- **Terminologija:** “Riemann” znači da je naš inital data $(M,^3 g, K)$ omeđen minimalnom površinom (a ne općenito trapped površinom) i ima $R \geq 0$. Ovo su prostorolike kriške prostorvremena s horizontom samo ako su vremenski simetrične.

Propozicija 11.1. *(Riemann Positive Mass Inequality za grafove) Neka f kao prije, (M^n, g) njen graf i R skalarna zakrivljenost. Tada*

$$m = \int_{M^n} \mathrm{d}V \, \frac{R}{2(n-2)\omega_{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

$R \geq 0$ povlači $m \geq 0$.

- za dokaz je potrebna opservacija:

Lema 11.1. *Skalarna zakrivljenost grafa $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij} + f_i f_j)$ je*

$$R = \nabla \cdot \left[\frac{1}{1 + |\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\partial_j\right]$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \left[\frac{1}{1 + |\nabla f|^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i)\partial_j\right] \\
&= \frac{1}{1 + |\nabla f|^2}(f_{iij}f_j + f_{ii}f_{jj} - f_{ijj}f_i - f_{ij}f_{ij}) - 2\frac{2f_{jk}f_k}{(1 + |\nabla f|^2)^2}(f_{ii}f_j - f_{ij}f_i) \\
&= R
\end{aligned}$$

□

Dokaz. (RPMI)

$$\begin{aligned}
m &= \lim_r \frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \mathrm{d}S_r n^j (g_{ij,j} - g_{ii,j}) \\
&= \lim_r \frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \mathrm{d}S_r n^j (f_{ii} f_j - f_{ij} f_i) \\
&= \lim_r \frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}} \int_{S_r} \mathrm{d}S_r n^j \frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii} f_j - f_{ij} f_i) \\
&= \frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x \nabla \cdot \left[\frac{1}{1+|\nabla f|^2} (f_{ii} f_j - f_{ij} f_i) \partial_j \right] \\
&= \frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}^n x R \\
&= \frac{1}{2(n-2)\omega_{n-1}} \int_{M^n} \mathrm{d}V \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} R
\end{aligned}$$

□

- rigidnost nije još dokazana
- u slučaju ograničenih grafova: Neka $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničen otvoren skup s glatkom $\Sigma = \partial\Omega$ ne nužno povezanom, i $f : \mathbb{R}^n - \Omega \to \mathbb{R}$, $\Sigma \subset f^{-1}(0)$ Tada masi dodajemo surface term

$$m_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}\Sigma \frac{H}{2(n-2)\omega_{n-1}}$$

- oblik Aleksandrov-Fenchelove nejednakosti za konveksni Σ daje (**lema**!)

Lema 11.2. *Neka $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ konveksna i povezana, sa srednjom zakrivljenošti H. Tada*

$$m_\Sigma \geq \frac{1}{2} \left(\frac{|\Sigma|}{\omega_{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

Neka su $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ glavne zakrivljenosti plohe. Definiraj elementarnu simetričnu fju

$$\sigma_j(\kappa) = \binom{n-1}{j}^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n-1} \kappa_1 \cdots \kappa_j.$$

Posebno,

$$\begin{aligned}
\sigma_0(\kappa) &= 1 \\
\sigma_1(\kappa) &= \frac{1}{n-1} \sum_i \kappa_i = \frac{1}{n-1} H \\
\sigma_{n-1}(\kappa) &= \prod_i \kappa_i.
\end{aligned} \tag{23}$$

Definiraj quermassintegral $V_k = \int_\Sigma \mathrm{d}\Sigma\, \sigma_k \kappa$. Imamo

$$\begin{aligned}
V_0 &= |\Sigma| \\
V_1 &= \frac{1}{n-1} \int_\Sigma \mathrm{d}\Sigma\, H \\
V_{n-1} &= \omega_{n-1}. \quad \text{(Chern-Lashof (ne)jednakost)}
\end{aligned} \tag{24}$$

Aleksandrov-Fenchelova nejednakost kaže, za $1 < j < k \leq n-1$

$$V_j^k \geq V_i^{k-j} V_k^{i-j},$$

tojest $V_1^{n-1} \geq V_0^{n-2} V_2$.

Propozicija 11.2. *(zapravo korolar) (Riemann Penrose Inequality za grafove) Uz pretpostavke kao prije, neka su sve povezane komponente Ω_i konveksne i $\Sigma_i = \partial\Omega_i$:*

$$m \geq \sum_{i=1}^{\#} \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} + \int_{M^n} \mathrm{d}V\, \frac{R}{2(n-2)\omega_{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}.$$

Posebno, $R \geq 0$ povlači

$$m \geq \sum_{i=1}^{\#} \frac{1}{2}\left(\frac{|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{\#}|\Sigma_i|}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$$

12. Penroseova/e nejednakost/i

- nejednakost oblika $M \geq \sqrt{A/16\pi}$ iskazana pomoću crnih rupa - nužno je zamijeniti BH površinu nekom drugom (da ne moramo znati detaljnu globalbu budućnost prostorvremena), te da se iskaže nezavnisno o cosmic censorshipu
- gravitacijski kolaps
  - cosmic censor: dolazi do BH; Israel, Hawking, Robinson: BH je Kerr

$$A_f = 8\pi\left(M^2 + \sqrt{M^4 - J^2}\right) \leq 16\pi M^2$$

  - Hawking area tm. (entropija):

$$A_i \leq A_f$$

  - budući da dio energije pobjegne od BH grav. valovima, $M \leq E$
  - sve skupa,

$$A_i \leq 16\pi E^2$$

Propozicija 12.1. *RPI Neka (M^3, g) potpuna, glatka, asimptotski ravna 3-mnogostrukost s $R \geq 0$, ukupnom masom m i neka vanjske minimalne sfere imaju površinu A. Tada*

$$M \geq \sqrt{A/16\pi}$$

s jednakošću akko izometrična $(\mathbb{R}^3 - \{0\}, (1+\frac{m}{2r})^4\delta)$ izvan nekog horizonta.

13. Inverse mean curvature flow

Definicija 13.1. Neka je Σ zatvorena 2 dim. površina u (M^3, g). Folijacija Σ u M s brzinom toka η je glatka familija $F : \Sigma \times [0, T] \to M$ površina $\Sigma_t = F(\Sigma, t)$ s evolucijom

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \eta\nu$$

gdje su η glatka fja, ν vanjska normala na Σ_t i $\frac{\partial F}{\partial t}$ normalno vektorsko polje brzine. Ako $\eta = \frac{1}{H}$, inverzni tok srednje zakrivljenosti.

- ekspanzija

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{d}S = H\eta\mathrm{d}S \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}|\Sigma_t| = |\Sigma_t|$$

Definicija 13.2. Hawkingova masa

$$m_H(\Sigma) \equiv \sqrt{\frac{|\Sigma|}{16\pi}} \left(1 - \frac{1}{16\pi} \int_\Sigma \mathrm{d}S\, H^2\right)$$

- za minimalnu površinu $H = 0$, pa m_H saturira RPI
- (Geroch-Jang-Wald) za IMCF, s $\Sigma_0 = \Sigma$,

$$\frac{\mathrm{d}m_H(\Sigma)}{\mathrm{d}t} \geq 0, \quad \forall t$$

- Hawkingova masa dovoljno okruglih sfera u beskonačnosti ide u

$$\lim_t m_H(\Sigma_t) = m_{ADM}$$

- za IMCF, $m_{ADM} = \lim_t m_H(\Sigma_t) \geq m_H(\Sigma_0) = \sqrt{\frac{A}{16\pi}}$
- primjer. Reissner-Nordström:

$$H^2 = 4\frac{r^2 - 2rM + e^2}{r^4} \Rightarrow \int H^2 = 16\pi \frac{r^2 - 2rM + e^2}{r^2} \tag{25}$$

$$m_H = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{r^2 - 2rM + e^2}{r^2}\right) = M - \frac{e^2}{2r} \tag{26}$$

- no općenito je za horizont događaja $H = 0$
- za male sfere, $m_H = \frac{4\pi}{3} r^3 T_{ab} t^a t^b + \mathcal{O}(r^4)$ ili $m_H = \frac{1}{90} r^5 T_{abcd} t^a t^b t^c t^d + \mathcal{O}(r^6)$

14. H.L. Brayev dokaz konformalnim tokom

- konstrukcija toka (M, g_t), $0 \leq t < \infty$ koji konvergira u Schwarzschild, svi $R \geq 0$, i $\Sigma(t)$ vanjska minimalna površina
- definiramo tok kao

$$g_t = u_t(x)^4 g_0 \tag{27}$$

$$v_t \text{ tako da} \begin{cases} \Delta_{g_0} v_t(x) = 0 & \text{izvan } \Sigma(t) \\ v_t(x) = 0 & \text{na } \Sigma_t \\ \lim\limits_{x\to\infty} v_t(x) = -e^{-t} \end{cases} \tag{28}$$

$$u_t(x) = 1 + \int_0^t \mathrm{d}s\, v_s(x) \tag{29}$$

- v_t pa i u_t superharmoničke. $\lim_r u_t(x) = e^{-t}$ pa $u(x) > 0$, pa i $R_{g_t} = -8u_t(x)^{-5}\left(\Delta_{g_0} + R_{g_0}\right) u_t(x) \geq 0$

Propozicija 14.1. *Rješenje postoji i Lipschitz je u t, C^1 u x posvuda i glatko izvan $\Sigma(t)$. $\Sigma(t)$ je glatki vanjski minimizirajući horizont $\forall t \geq 0$ i $\Sigma(t_2)$ zatvara ali ne dira $\Sigma(t_1)$ za $t_2 > t_1 \geq 0$*

Propozicija 14.2. *$A(t)$ je konstantna u t i $m(t)$ je nerastuća fja.*

Propozicija 14.3. *Za dovoljno velik t, postoji difeomorfizam ϕ_t t.d. je $(M - \bar{\Sigma}(t), g_t)$ difeomorfna Schwarzschildu. Nadalje, za $\forall \epsilon > 0$ $\exists T$ t.d. su za $t > T$ metrike g_t i $\phi_t^*(Schw.)$ unutar ϵ jedna od druge (pri računanju duljina vektora), te su im i mase unutar ϵ. Dakle*

$$\lim_t \frac{m(t)}{\sqrt{A(t)}} = \sqrt{\frac{1}{16\pi}}.$$

Dokaz. (samo intuitivno) Harmonički ravne mnogostrukosti imaju $R = 0$ van kompaktnog skupa, a $\Sigma(t)$ će zatvarati svaki kompaktni skup u nekom konačnom vremenu, pa će R u nekom trenu iščeznuti izvan $\Sigma(t)$. Ako prihvatimo da će metrike konvergirati u sferično simetrične metrike izvan horizonta, teorem slijedi jer je jedina Ricci ravna, potpuna, sferično simetrična 3-dim mnogostrukost Schwarzschild. □

- dokaz sad slijedi iz

$$m(t) \geq m(\infty) = \frac{A(\infty)}{16\pi} = \frac{A(0)}{16\pi}$$

ako pretpostavimo da vrijedi positive mass teorem.

thebibliography