Pozitivnost energije i spinorijalne metode u OTR
(2. dio)

Fran Globlek
Fizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu, p.p. 331, HR-10002 Zagreb, Hrvatska
(Dated: 5. travnja 2017.)

Contents

1. Poluklasična stabilnost prostora Minkowskog

- motivacija: mogućnost da je euklidski prostor lažni vakuum, u smislu da postoji vakuum niže energije
- poznati rezultat je da je Minkowski stabilan na perturbacije, no svejedno može doći do tuneliranja u pravi vakuum
- pitanje: je li moguće postepeno tuneliranje, tako da u beskonačnosti novi vakuum još "nije stigao", pa vrijedi

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{1}$$
$$g_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}, \quad a_{ij} \to 0, |x| \to \infty \tag{2}$$

- uzimamo $a_{ij} = \mathcal{O}\big(1/r^4\big)$ po uzoru na rješenja lineariziranih Einsteinovih jednadžbi koja se ponašaju kao kvadrupoli u 4 dimenzije
- ovo znači i ${\Gamma^i}_{jk} = \mathcal{O}\big(r^{-5}\big)$
- konstuirat ćemo koordinate u kojima je $g_{ij} = \delta_{ij}$
- kartezijeve koordinate, ako ih shvatimo kao skalarne funkcije, zadovoljavaju Laplaceovu jdbu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) x_i = 0$$

zato gledamo rješenja

$$D^2\phi = 0, \quad D^2 \equiv g_{\mu\nu} D^\mu D^\nu$$

- pokažimo da ne postoje rješenja koja iščezavaju u beskonačnosti i nisu nula:

$$0 = \int_M \mathrm{d}V \phi \left(-D^2\right) \phi = \int_M \mathrm{d}^4 x \sqrt{g} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi \tag{3}$$

iz čega slijedi $\partial_\mu \phi = 0$, a rubni uvijet $\phi(|x| \to \infty) = 0$ implicira $\phi(x) = 0$ svugdje

- sad tražimo rješenje koje ne iščezava u beskonačnosti. Kao ansatz uzmimo

$$\phi = a \cdot x + \mathcal{O}\big(1/r^3\big)$$

gdje je a^μ konstantni vektor. Međutim ova j izraz vjerojatno nema smisla svugdje, jer x_i neće biti definirane unutar nekog kompaktnog skupa. Uzmimo neku otvorenu kuglu radijusa R_0 koja pokriva taj skup. Tada je sigurno x_i dobro definiran za neki $R > R_0$, pa stavimo

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

gdje je $\phi_1 = a \cdot x f(|x|)$ s glatkom $f(|x| > R) = 0$ i $f(|x| \leq R_0) = 0$.

- Sad trebamo naći ϕ_2, koji zadovoljava

$$D^2 \phi_2 = -D^2 \phi_1.$$

Ovo formalno rješavamo Greenovom fjom

$$\phi_2 = -\int \mathrm{d}y G(x,y) D^2 \phi_1(x)$$

Budući da smo vidjeli da laplasijan nije singularan, ovo vrijedi ako integral konvergira. To je istina jer $D^2\phi_1 = \mathcal{O}\big(|y|^{-5}\big)$.

- $G(x,y) \sim |x-y|^{2-n}$, što je neovisno o $|y|$ ako je $|x|$ velik, pa pišemo

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\pi^2 |x|^2} \int \mathrm{d}y D^2 \phi_1(y) + \mathcal{O}\big(|x|^{-3}\big)$$

no integral iščezava jer $\int \mathrm{d}y D^2 \phi_1 = \int \mathrm{d}^4 y \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} \partial^\mu \phi_i) = 0$. Dakle $\phi_2 = \mathcal{O}\big(|x|^{-3}\big)$ i imamo rješenje

$$\phi(x) = a \cdot x f(|x|) - \int \mathrm{d}y G(x,y) D^2 a \cdot y f(|y|)$$

koje zadovoljava rubni uvijet.

- Sad pokažimo da je $K_\mu \equiv \partial_\mu \phi$ kovarijantno konstantno polje, tj $D_\mu K_\nu = 0$:

$$\int \mathrm{d}x (D_\mu K_\nu)^2 = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x (D_\mu K_\nu - D_\nu K_\mu)^2 + \int \mathrm{d}x D_\mu K_\nu D^\nu K^\mu \tag{4}$$

prvi član iščezava jer

$$D_\mu \partial_\nu \phi - D_\nu \partial_\mu \phi = (\partial_\mu \partial_\nu - \partial_\nu \partial_\mu)\phi + ({\Gamma^\rho}_{\mu\nu} - {\Gamma^\rho}_{\nu\mu})\phi = 0.$$

Integriramo po dijelovima:

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x D_\mu K^\nu D_\nu K^\mu &= \int \mathrm{d}x D_\mu (K^\nu D_\nu K^\mu) - \int \mathrm{d}x K^\nu D_\mu D_\nu K^\mu & (5)\\
&= \int \mathrm{d}x D_\mu (K^\nu D_\nu K^\mu) - \int \mathrm{d}x K^\nu [D_\mu, D_\nu] K^\mu + \int \mathrm{d}x K^\nu D_\nu D_\mu K^\mu & (6)\\
&= \int \mathrm{d}x D_\mu (K^\nu D_\nu K^\mu) - \int \mathrm{d}x K^\nu R_{\mu\nu} K^\mu + \int \mathrm{d}x D_\nu (K^\nu D_\mu K^\mu) - \int \mathrm{d}x (D^\mu K_\mu)^2 & (7)\\
&= 0 & (8)
\end{aligned}$$

- budući da smo imali konstantan vektor a, imamo 4 linearno nezavisna kovarijantno konstantna polja K_μ, što znači da se radi o ravnom prostoru. To vidimo i jer

$$0 = D^2 \phi = \frac{\partial}{\partial \phi_i} \frac{\partial}{\partial \phi_j} \phi - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial \phi_k} \phi \Rightarrow 0 = -\Gamma^k_{ij} a_k.$$

- ovo vrijedi u svim dimenzijama, samo je asimptotika različita

2. Positive energy theorem

- kao i prije, pretpostavimo da vrijedi

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{9}$$
$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}(1/r) \tag{10}$$
$$g_{\mu\nu,\rho} = \mathcal{O}\big(1/r^2\big) \tag{11}$$

  i da vrijedi pozitivnost materije, barem $T^{00} \geq 0$ u svakom sustavu

- promatrat ćemo rješenja $i\not{D}\epsilon = 0$
- za D_i odaberemo kovarijantnu derivaciju na čitavom prostoru, iako ćemo njome djelovati na točke Cauchyjeve 3-površine
- vrijedi:

$$0 = (i\not{D})^2\epsilon = -\gamma^i\gamma^j D_i D_j \epsilon = -D^i D_i \epsilon - \frac{1}{4}\big[\gamma^i, \gamma^j\big][D_i, D_j]\epsilon \tag{12}$$

3. Digresija: γ matrice i spin konekcija

- uvodimo $e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu$, $\det\{e_a{}^\mu \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\} > 0$ tako da dobivamo ONB:

$$g(e_a, e_b) = e_a{}^\mu e_b{}^\nu g_{\mu\nu} = \eta_{ab}$$

- vrijedi i inverzna relacija: $g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}$
- također, za bilokoji vektor imamo $V = V^\mu \partial_\mu = V^a e_a = V^a e_a{}^\mu \partial_\mu$ stoga $V^\mu = V^a e_a{}^\mu$ i $V^a = V^\mu e^a{}_\mu$
- možemo izgraditi i objekte s miješanim Lorentz i koordinatnim indeksima: $T^{ab\cdots}_{\mu\nu\cdots}$
- ako uvedemo dualnu bazu, $\theta^a = e^a{}_\mu \mathrm{d}x^\mu$,

$$g = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \eta_{ab}\theta^a \otimes \theta^b$$

- budući da metrika ima $\frac{1}{2}n(n+1)$ "stupnjeva slobode", a $e^a{}_\mu$ ih ima n^2, imamo redudanciju $n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$
- ovo je dimenzija $\mathrm{SO}(1, n-1)$! Radi se o lokalnim Lorentzovim transformacijama

$$e^a{}_\mu(p) \to e'^a{}_\mu(p) = \Lambda^\mu{}_\nu(p) e^a{}_\nu(p)$$

- spinori se transformiraju po dvostrukom pokrivaču Lorentzove grupe (više riječi o tome kasnije) - dakle trebamo naći što točno znači ova derivacija, itd
- kao prvo, $\gamma^\mu \equiv \gamma^a e_a{}^\mu \Rightarrow \big\{\gamma^a, \gamma^b\big\} = 2g^{ab}$
- definiramo **spin konekciju** t.d. $D_\mu V^a = \partial_\mu V^a + \omega_\mu{}^a{}_b V^b$
- vidimo da je ona zapravo: $\omega^\mu{}_{a\nu} = e^\mu{}_{a;\nu} = e^\mu{}_{a,\nu} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} e^\lambda{}_a$, što osigurava $D_\mu e^\nu{}_a = 0$
- pokažimo da je antisimetrična:

$$D_\mu \eta_{ab} = \omega_{\mu a}{}^c \eta_{cb} + \omega_{\mu b}{}^c \eta_{ac} = \omega_{\mu ab} + \omega_{\mu ba} = 0 \tag{13}$$

- pokažimo na koji način derivacija nosi reprezentaciju Lorentzove grupe:

$$\begin{aligned} D_\mu V^a &= \partial_\mu V^a + \omega_{\mu\ b}^{\ a} V^b = \partial_\mu V^a + \omega_\mu^{ab} V_b \\ &= \partial_\mu V^a + \frac{\omega_\mu^{ls}}{2}[\delta_l^a \delta_s^b - \delta_l^b \delta_s^a] V_b = \partial_\mu V^a + \frac{\omega_\mu^{ls}}{2}[\delta_l^a g_{bs} - \delta_s^a g_{bl}] V^b \\ &= \partial_\mu V^a - \frac{i}{2}\omega_\mu^{ls} (M_{ls})^a_{\ b} V^b \end{aligned} \tag{14}$$

- sad vidimo da za spinore imamo analogno:

$$D_\mu \epsilon = \left(\partial_\mu + \frac{1}{4}\omega_\mu^{\ ab}\gamma_{ab}\right)\epsilon$$

- sad imamo analogno

$$[D_\mu, D_\nu]\epsilon = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\lambda\gamma^\rho\epsilon \tag{15}$$

4. Nastavak

- stali smo na izrazu: $-D^i D_i \epsilon - \frac{1}{4}\left[\gamma^i, \gamma^j\right][D_i, D_j]\epsilon = -D^i D_i\epsilon - \frac{1}{32}\mathcal{R}_{ij\alpha\beta}\left[\gamma^i, \gamma^j\right]\left[\gamma^\alpha, \gamma^\beta\right]\epsilon = 0$
- ovo je slično kao što se u valnoj jdbi za e.m. javljaju članovi ovisni o zakrivljenosti
- sad slijedi vježba iz Cliffordove algebre:

$$\left[\gamma^i, \gamma^j\right]\left[\gamma^\alpha, \gamma^\beta\right] = 4\varepsilon^{ij\alpha\beta}\gamma^5 - 4\left(g^{i\alpha}g^{j\beta} - g^{i\beta}g^{j\alpha}\right) \tag{16}$$

$$+ 2\left(-g^{i\alpha}\left[\gamma^j, \gamma^\beta\right] + g^{i\beta}\left[\gamma^j, \gamma^\alpha\right] + g^{j\alpha}\left[\gamma^i, \gamma^\beta\right] - g^{j\beta}\left[\gamma^i, \gamma^\alpha\right]\right) \tag{17}$$

- ovo slijedi iz relacije:

$$\gamma^i\gamma^j\gamma^\alpha\gamma^\beta = \gamma^i\gamma^j\left(\gamma^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\right) \tag{18}$$

$$= \gamma^i\left(\gamma^{i\alpha\beta} + \gamma^\beta g^{j\alpha} - \gamma^\alpha g^{j\beta} + \gamma^j g^{\alpha\beta}\right) \tag{19}$$

$$= \gamma^{ij\alpha\beta} + g^{ij}\gamma^{\alpha\beta} - g^{i\alpha}\gamma^{j\beta} + g^{i\beta}\gamma^{j\alpha} + g^{j\alpha}\gamma^{i\beta} - g^{j\alpha}\gamma^{i\beta} + g^{\alpha\beta}\gamma^{ij} + g^{i\beta}g^{j\alpha} - g^{i\alpha}g^{j\beta} + g^{ij}g^{\beta\alpha} \tag{20}$$

- ovdje smo koristili identitet: $\gamma_a\gamma_{b_1\ldots b_n} = \gamma_{ab_1\ldots b_n} + \sum_i (-)^{i+1} g_{ab_i}\gamma_{b_1\ldots\hat{b}_i\ldots b_n}$
- gledamo članove zasebno
  - $\varepsilon^{ij\alpha\beta}\mathcal{R}_{ij\alpha\beta} = 0$
  - $-\frac{1}{32}\mathcal{R}_{ij\alpha\beta}(-4)\left(g^{i\alpha}g^{j\beta} - g^{i\beta}g^{j\alpha}\right) = \frac{1}{4}\mathcal{R}_{ij}^{\ \ ij}$
  -

$$-\frac{1}{16}\mathcal{R}_{ij\alpha\beta}\left(-g^{i\alpha}\left[\gamma^j, \gamma^\beta\right] + g^{i\beta}\left[\gamma^j, \gamma^\alpha\right] + g^{j\alpha}\left[\gamma^i, \gamma^\beta\right] - g^{j\beta}\left[\gamma^i, \gamma^\alpha\right]\right) \tag{21}$$

$$= -\frac{1}{8}\left[-\mathcal{R}_{ij\ \beta}^{\ \ i}\gamma^{j\beta} + \mathcal{R}_{ij\alpha}^{\ \ \ i}\gamma^{j\alpha} + \mathcal{R}_{ij\ \beta}^{\ \ j}\gamma^{i\beta} - \mathcal{R}_{ij\alpha}^{\ \ \ j}\gamma^{i\alpha}\right] \tag{22}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\mathcal{R}_{ij\ \alpha}^{\ \ j}\gamma^{i\alpha} + \mathcal{R}_{ji\alpha}^{\ \ \ j}\gamma^{i\alpha}\right] \tag{23}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{R}_{ij\ \alpha}^{\ \ j}\gamma^{i\alpha} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}^j_{\ \alpha ji}\gamma^{\alpha i} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}^j_{\ 0ji}\gamma^{0i} = -\frac{1}{2}\mathcal{R}^j_{\ 0ji}\left(\gamma^0\gamma^i + g^{0i}\right) = -\frac{1}{2}\mathcal{R}^j_{\ 0ji}\gamma^0\gamma^i \tag{24}$$

- sad ovo dovodimo u vezu s tenzorom stresa i energije
  - budući da je $g_{00} = -1$, $R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = R_{00} + \frac{1}{2}R = 8\pi T_{00}$
  - ali, $R = \mathcal{R}^{\mu\nu}_{\ \ \mu\nu} = 2\mathcal{R}^{io}_{\ \ io} + \mathcal{R}^{ij}_{\ \ ij}$

– također, $R_{00} = \mathcal{R}^{i}{}_{0i0}$, ali $\mathcal{R}^{i0}{}_{i0} = g^{0\mu}\mathcal{R}^{i}{}_{\mu i0} = -\mathcal{R}^{i}{}_{0i0}$ jer $g^{0\mu} = -\delta^{\mu 0}$

– dakle, $\frac{1}{2}\mathcal{R}^{ij}{}_{ij} = 8\pi T_{00}$

– također, imamo

$$R_{0j} + \frac{1}{2}g_{0j}R = R_{0j} = R^{i}{}_{0ij} = 8\pi T_{0j}$$

- vraćamo se na valnu jednadžbu

$$-D^i D_i \epsilon + 4\pi \left(T_{00} + T_{0j}\gamma^0\gamma^j\right)\epsilon = 0 \tag{25}$$

Propozicija 4.1. *Ne postoji netrivijalno rješenje $\not{D}\epsilon = 0$ koje iščezava u beskonačnosti.*

Dokaz. Množimo valnu jdbu slijeva s ϵ^* i integriramo po volumenu:

$$\int \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^3g}\epsilon^*\left(-D^iD_i\epsilon + 4\pi\left(T_{00} + T_{0j}\gamma^0\gamma^j\right)\epsilon\right) = 0$$

Prvi član parcijalno integriramo, i površinskog člana nema jer $\epsilon \to 0$ u beskonačnosti. Sad imamo:

$$\int \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^3g}D^i\epsilon^* D_i\epsilon + 4\pi\int \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^3g}\epsilon^*\left(T_{00} + T_{0j}\gamma^0\gamma^j\right)\epsilon = 0$$

No drugi član je nenegativan jer je matrica $T_{00} + T_{0j}\gamma^0\gamma^j$ pozitivno semidefinitna. Imamo uvjet na energiju (dominant energy condition, koji osigurava da je $T_{00} \geq 0$ svagdje i u svakom sustavu) $T_{00} \geq \sqrt{\sum_k T_{0k}^2}$, a sv. vrijednosti matrice $T_{0j}\gamma^0\gamma^j$ su $\pm\sqrt{\sum_k T_{0k}^2}$.

Dakle, $D_i\epsilon = 0$, i rubni uvjet daje $\epsilon = 0$. □

5. Postojanje netrivijalnog rješenja

- treba pokazati da postoji rješenje Diracove jdbe t.d.

$$\epsilon = \epsilon_0 + \mathcal{O}(1/r)$$

- kao prije, uzimam $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$, gdje se ϵ_1 ponaša kako želim u beskonačnosti, pa želim ϵ_2 definirati pomoću njega i pokazati da trne još brže
- pišem $\epsilon_1 = \epsilon_0 + \frac{1}{r}\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) + \mathcal{O}\big(1/r^2\big)$
- Diracov operator je $\not{D} = \gamma^i(\partial_i + \Gamma_i)$, $\Gamma_i = \mathcal{O}\big(1/r^2\big)$
- budući da je ϵ_0 konstanta:

$$\not{D}\epsilon_0 = \gamma_i\Gamma^i\epsilon_0 \equiv \frac{1}{r^2}A(\theta,\phi) + \mathcal{O}\big(1/r^3\big)$$

- također:

$$\not{D}(\frac{1}{r}\tilde{\epsilon}(\theta,\phi)) = \gamma^i\partial_i(\frac{1}{r}\tilde{\epsilon}(\theta,\phi)) + \mathcal{O}\big(1/r^3\big)$$

- želimo pokazati da $\not{D}\epsilon_1 = \mathcal{O}\big(1/r^3\big)$, dakle tražim rješenje

$$\not{\partial}(\frac{1}{r}\tilde{\epsilon}(\theta,\phi)) = -\frac{1}{r^2}A(\theta,\phi)$$

- rastavljamo $\not{\partial} = \gamma^r\partial_r + \frac{1}{r}\not{\partial}^T$ i dobivamo

$$-\gamma^r\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) + \not{\partial}^T\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) = -A(\theta,\phi) \tag{26}$$

$$(1 - \gamma^r\not{\partial}^T)\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) = \gamma^r A(\theta,\phi) \tag{27}$$

- ovo je invertibilan operator jer nema sv. vrijednosti nula. U suprotnom je $(1/r)\tilde{\epsilon}(\theta,\phi)$ rješenje Diracove jdbe, ali trne kao $1/r$ a ne $1/r^2$ kako bi moralo
- sad uzimamo $\epsilon_2 = -\int \mathrm{d}yS(x,y)\not{D}\epsilon_1(y)$, no $S = \frac{1}{4\pi r^2}\gamma\cdot\hat{x} + \mathcal{O}\big(1/r^3\big)$. Dakle $\epsilon_2 = \mathcal{O}\big(1/r^2\big)$

6. Pozitivnost energije

- sad ponavljamo integraciju valne jdbe po prostoru, no zadržavamo površinski član:

$$\int \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^3g}D_k(\epsilon^* D^k\epsilon) = \int \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^3g}D^i\epsilon^* D_i\epsilon + 4\pi\int \mathrm{d}^3x\sqrt{{}^3g}\epsilon^*\left(T_{00}+T_{0j}\gamma^0\gamma^j\right)\epsilon \tag{28}$$

- dakle,

$$S \equiv \int \mathrm{d}^3x D_k(\epsilon^* D^k\epsilon) = \int \mathrm{d}^3x\partial_k(\sqrt{{}^3g}\epsilon^* D^k\epsilon) = \int d^2S_k\epsilon^* D^k\epsilon \tag{29}$$

- treba pokazati da ovo odgovara energiji. Uzimamo $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ i ONB $e^i{}_\mu = \delta^i_\mu + \frac{1}{2}h^i_\mu$
- spin konekcija glasi $\Gamma_\mu = \frac{1}{16}\left(\partial_\beta h_{\alpha\mu} - \partial_\alpha h_{\beta\mu}\right)\gamma^{\alpha\beta} = \mathcal{O}\big(1/r^2\big)$
- sad računamo

$$S = \int \mathrm{d}\Omega r^2\epsilon^* D_r\epsilon = \int \mathrm{d}\Omega r^2\epsilon^*\left(\Gamma_r\epsilon_0 - \frac{1}{r^2}\tilde{\epsilon}(\theta,\phi)\right) \tag{30}$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega r^2\epsilon_0^*\Gamma_r\epsilon_0 - \int \mathrm{d}\Omega\epsilon_0^*\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) \tag{31}$$

- prije smo imali $\left(1-\gamma^r\frac{1}{r}\not{\partial}\right)\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) = r^2\gamma^r\gamma^i\Gamma_i\epsilon_0 + \mathcal{O}\big(1/r^3\big)$
- promotrimo drugi član:

$$\int \mathrm{d}\Omega\epsilon_0^*\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) = \int \mathrm{d}\Omega\epsilon_0^*\gamma^r\frac{1}{r}\not{\partial}\tilde{\epsilon}(\theta,\phi) + \int \mathrm{d}\Omega\epsilon_0^* r^2\gamma^r\gamma^i\Gamma_i\epsilon_0$$

- pokažimo da je prvi član nula:

$$\int \mathrm{d}^3x\partial_k\left[\epsilon_0^*\gamma^k\gamma^l\frac{1}{r}\partial_l\tilde{\epsilon}\right] = \int \mathrm{d}^3x\partial_k\partial_l\left[\epsilon_0^*\gamma^k\gamma^l\frac{1}{r}\partial_l\tilde{\epsilon}\right] + \int \mathrm{d}^3x\partial_k\left[\epsilon_0^*\gamma^k\frac{\vec{\gamma}\cdot\mathbf{x}}{r^3}\tilde{\epsilon}\right] \tag{32}$$

$$= \int \mathrm{d}^3x\partial_k^2\left[\epsilon_0^*\frac{1}{r}\tilde{\epsilon}\right] + \int \mathrm{d}^3x\partial_k\left[\epsilon_0^*\gamma^k\frac{\vec{\gamma}\cdot\mathbf{x}}{r^3}\tilde{\epsilon}\right] \tag{33}$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega r^2\partial_r\left[\epsilon_0^*\frac{1}{r}\tilde{\epsilon}\right] + \int \mathrm{d}\Omega r^2\left[\epsilon_0^*\gamma^r\frac{(\vec{\gamma}\cdot\mathbf{x}=\gamma^r r)}{r^3}\tilde{\epsilon}\right] \tag{34}$$

$$= \int \mathrm{d}\Omega\epsilon_0^*\tilde{\epsilon} - \int \mathrm{d}\Omega\epsilon_0^*\tilde{\epsilon} = 0 \tag{35}$$

- dakle, imamo

$$S = \int \mathrm{d}S^k\epsilon_0^*\left(\Gamma_k - \gamma_k\gamma^i\Gamma_i\right)\epsilon_0$$

- iz spin konekcije slijedi

$$\Gamma_k - \gamma_k\gamma_i\Gamma_i = \frac{1}{4}\left(\partial_i h_{ki} - \partial_k h_{ii}\right) \tag{36}$$

$$+\frac{1}{8}\partial_\beta h_{ki}[\gamma_i,\gamma_\beta] - \frac{1}{8}\partial_k h_{\beta i}[\gamma_i,\gamma_\beta] - \frac{1}{8}\partial_\beta h_{ii}[\gamma_k,\gamma_\beta] + \frac{1}{8}\partial_i h_{\beta i}[\gamma_k,\gamma_\beta] \tag{37}$$

- članovi s $\beta \neq 0$ iščezavaju pri integraciji:
  - $\int \mathrm{d}S^k\partial_\beta h_{ii}[\gamma_k,\gamma_\beta] = \int \mathrm{d}^3x\partial_k\partial_\beta h_{ii}[\gamma_k,\gamma_\beta] = 0$
  - $\int \mathrm{d}S^k\left(\partial_\beta h_{ki}[\gamma_i,\gamma_\beta] + \partial_i h_{\beta i}[\gamma_k,\gamma_\beta]\right) = \int \mathrm{d}^3x\left(\partial_\beta\partial_k h_{ki}[\gamma_i,\gamma_\beta] - \partial_k\partial_i h_{i\beta}[\gamma_\beta,\gamma_k]\right) = 0$

- dakle imamo

$$S = \frac{1}{4}\epsilon_0^*\epsilon_0 \int \mathrm{d}S^j \left(\partial_i h_{ji} - \partial_j h_{ii}\right) + \frac{1}{4}\epsilon_0^*\gamma^0\gamma^k\epsilon_0 \int \mathrm{d}S^j \left(\partial_j h_{0k} - \partial_0 h_{jk} + \delta_{jk}\partial_0 h_{ii} - \delta_{jk}\partial_i h_{0i}\right)$$

- prepoznajemo izraze za E i P_k:

$$S = 4\pi \left(\epsilon_0^*\epsilon_0 E + \epsilon_0^*\gamma^0\gamma^k P_k \epsilon_0\right)$$

- odaberemo ϵ_0 t.d. je sv. vektor hermitske matrice $\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\mathbf{P}$ sa sv. vr. $-|P|$ i imamo

$$E \geq |P|$$

  jer znamo da je $S \geq 0$

Propozicija 6.1. *(**Rigidnost**) Samo prostor Minkowskog ima $E = 0$.*

Dokaz. $E = 0$ povlači $|P| = 0$ i $S = 0\ \forall\epsilon_0$, što znači da $D_i\epsilon = 0$. Slijedi da $\epsilon \neq 0$ svugdje jer je kovarijantno konstantan. No $D_i\epsilon = 0$ povlači

$$[D_i, D_j]\epsilon = \frac{1}{4}\mathrm{R}_{ij\alpha\beta}\gamma^\alpha\gamma^\beta\epsilon = 0$$

Ovo povlači da je Cauchyjeva hiperpovršina ravna, jer ovo vrijedi za svaki ϵ_0, pa odaberemo kovarijatno konstantnu bazu nenula spinorijalnih polja. No vrijedi i općenito, jer uvijek možemo deformirati našu hiperpovršinu bez da diramo njen oblik u beskonačnosti. □

7. Veza sa SUGRA

- hamiltonijan u sugra se može zapisati kao

$$H = \frac{1}{\hbar}\sum_\alpha Q_\alpha^2.$$

- $Q_\alpha \to 0$ kad $\hbar \to 0$ jer su vezani uz fermionska polja
- bez gravitacije,

$$Q_\alpha = \int \mathrm{d}^3x \bar{\epsilon}_\alpha S_{0\alpha}$$

  gdje je ϵ_α konstantan spinor. U gravitaciji nema (kov.) konstantnih spinora, pa uzimamo istu definiciju ali da je asimptotski konstantan.

- zbog lokalne susy, ϵ je u biti arbitraran. Uvjetom $\not{D}\epsilon = 0$ ga fiksiramo.

8. Reprezentacije fundamentalne grupe

- prirodno je istražiti kako se fizikalna stanja transformiraju pri akciji fundamentalne grupe π_1

Propozicija 8.1. *Neka je X jednostavno povezan topološki prostor i Γ konačna grupa koja na X djeluje slobodno. Tada*

$$\pi_1(X/\Gamma) \cong \Gamma$$

Dokaz. Konstruirajmo homomorfizam $\phi : \Gamma \to \pi_1(X/\Gamma)$ tako da odaberemo neki $x_0 \in X$ i spojimo x_0 s $g \cdot x_0$ jedinstvenom klasom homotopije puteva $\tilde{\gamma}$. Ovo definira zatvorenu petlju u X/Γ, čiju klasu homotopije označimo s $\phi(g)$. Sad uzmimo dva puta γ_1 i γ_2 od x_0 do $g_1 \cdot x_0$ odnosno $g_2 \cdot x_0$. Kompozicija puteva $(g_2\gamma_1) \circ \gamma_2$ je put od x_0 do $g_1 g_2 x_0$ i slijedi $\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)$. Ovo je i izomorfizam ali to **nećemo pokazivati**. □

- promotrimo konfiguracijski prostor n neraspoznatljivih čestica u $\mathbb{R}^{nd}$

$$\mathcal{C} = (\mathbb{R}^d - \mathbb{D})/P_n$$

  gdje je $\mathbb{D} \equiv \{(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n) | \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j\}$

- u $d \geq 3$, $\mathbb{R}^{nd} - \mathbb{D}$ jednostavno povezan, pa $\pi_1(\mathcal{C}) = P_n$. Odavde slijedi Bose-Einstein i Fermi-Dirac statistika, jer su 1 dim unitarne irrep P_n simetrična ($U_g = 1$) i antisimetrinčna ($U_g = (-)^{\mathrm{sgn}(\pi)}$).
- u $d = 2$ lako se vidi da nema jednostavne povezanosti, a slijedi i $\pi_1(\mathcal{C}) = B_n$, Artinova braid grupa, s generatorima

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| \geq 2$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 2, \ldots, n-2$$

  i 1d irrepom $e^{i\theta}$ - **anyonska statistika**

9. Dvostruka povezanost $SO(3)$ i Lorentzove grupe

- primjer $SO(3)$ kao $S^2/\sim$
- spinori su objekti koji su osjetljivi na π_1! Pri punoj rotaciji transformiraju se netrivijalno - dobivaju negativan predznak.
- u QM predznak nije fizikalan. No nema smisla definirati ih do na predznak, jer se tad gubi mogućnost njihovog zbrajanja.
- Lorentzova grupa sadrži $SO(3)$ kao podgrupu, pa nije jednostavno povezana (čak je nije ni povezana, no to je druga priča)
- spinori se transformiraju po reprezentacijama pokrivača grupe rotacija SU(2) odnosno pokrivača Lorentzove grupe SL(2;$\mathbb{C}$)
- njihovo postojanje je nužno povezano uz metriku: tangentni svežanj općenito ima strukturnu grupu GL(n). Ako imamo orjentabilnost, držimo se GL$(n)^+$ povezane s jedinicom. Međutim ako probamo naći neke nove reprezentacije ako sve podignemo na univerzalni pokrivač, nećemo uspjeti jer se neće razlikovati od GL(n). No ako je strukturna grupa O(n) (što znači da postoji metrika!), maksimalna kompaktna podgrupa, tada orjentacija znači SO(n) i dižemo se na Spin(n) grupu.

10. Spin strukture

Definicija 10.1. **Svežanj** (E, M, F, G, π) nad M, s vlaknom F i strukturnom grupom G je glatka surjekcija $\pi : E \to M$ tako da vrijedi lokalna trivijanost: svaki $p \in M$ ima okolinu $\mathcal{U}$ i difeomorfizam $\phi_{\mathcal{U}} : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to \mathcal{U} \times F$ t.d. ovaj dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\phi_{\mathcal{U}}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathcal{U} \times F \arrow[d, "(p,f)\mapsto p"] \\ & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

tako da na $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \varnothing$ vrijedi

$$\phi_{\mathcal{U}_\alpha} \circ \phi_{\mathcal{U}_\beta}^{-1}|_{p \times F} = \rho\left(g_{\alpha\beta}(p)\right)$$

gdje su $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to G$ **prijelazne funkcije**. Mnogostrukost M zovemo **baza**, E **totalni prostor**, a na svakoj točki imamo **vlakno** $\pi^{-1}p \cong F$.

- mora vrijediti **cocycle condition**

$$g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{na } U_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \cap \mathcal{U}_\gamma \neq \varnothing$$

- možemo "zalijepiti" sve nazad:

$$E \cong \left(\cup_{\alpha}\mathcal{U}_{\alpha} \times F\right) / \sim, \quad (p, f) \sim (p, \rho\left(g_{\alpha\beta}(p)\right) f)$$

- slučaj kad je $F \cong G$ zovemo G-glavnim svežnjem
- primjer je svežanj ortonormalnih baza, gdje je $G \cong \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ ili $\mathrm{SO}(p, q)$
- ako želimo imati spinore, treba nam Spin(n) svežanj, kojeg gradimo sa SO(n) ili SO(p, q) svežnja
- neka je Π :Spin$(p, q)$$\rightarrow$SO$(p, q)$ projekcija. Sad sve što trebamo odabrati jest dobre $\widetilde{g_{\alpha\beta}} \rightarrow g_{\alpha\beta}$. No možemo uzeti neki $f_{\alpha\beta} \in \ker\Pi \cong \mathbb{Z}_2$, i uzeti $\widetilde{g'_{\alpha\beta}} = \widetilde{g_{\alpha\beta}} f_{\alpha\beta}$
- **geometrijska opstrukcija** konstrukcije spin strukture je

$$f_{\alpha\beta\gamma}\mathbb{1} = \widetilde{g_{\alpha\beta}}\widetilde{g_{\beta\gamma}}\widetilde{g_{\gamma\alpha}}$$

  koja definira karakterističnu klasu koju zovemo druga Stiefel-Whitneyeva klasa.
- **jedinstvenost** određuje postojanje različitih načina kako konzistentno dodijeljivati predznake nekontraktibilnim petljama, određuje ih Hom($\pi_1(E)$,$\mathbb{Z}_2$).
- sfera S^n, $n \geq 2$ ima jedinstvenu spin strukturu
- krug S^1 ima 2 neekvivalentne spin strukture: Ramond i Neveu-Schwarz - ovisno je li fermionsko polje periodično ili antiperiodično!
- $\mathbb{CP}^n$ ima spin strukturu samo ako n neparan
- kompaktna Riemannova površina Σ_g genusa g ima 2^{2g} neekivalentnih spin struktura
- za $g = 1$ imamo torus i sturkture: Ramond/Ramond, Ramond/Neveu-Schwarz, Neveu-Schwarz/Ramond, Neveu-Schwarz/Neveu-Schwarz

---

Wu, T.S. *General Theory for Quantum Statistics in Two Dimensions*, Phys. Rev. Lett. 52, 2103 (1984).